

УДК 532.59

ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

© 2016 г. В. В. Булатов^а, Ю. В. Владимиров^б

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

e-mail: ^а internalwave@mail.ru, ^б vladimyura@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.03.2016 г.

Рассмотрена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей внутренних гравитационных волн от движущегося источника возмущений в потоке вращающейся стратифицированной среды конечной глубины. Полученные решения описывают волновые возмущения как внутри, так и вне волновых фронтов и выражаются через функцию Эйри и ее производные. Приведены результаты численных расчетов волновых картин возбуждаемых волновых полей.

Ключевые слова: стратифицированная вращающаяся среда, внутренние гравитационные волны, дальние поля, равномерная асимптотика, волновой фронт.

DOI: 10.7868/S0568528116050078

Важным механизмом возбуждения полей внутренних гравитационных волн в океане, атмосфере Земли, искусственных стратифицированных средах является их генерация различными источниками возмущений: природного (движущийся тайфун, обтекание неровностей рельефа дна океана, подветренные горы) и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров [1–5]. Одним из основных факторов, определяющих характеристики возбуждаемых волновых полей, является вращение среды как целого [1–8]. Существующие подходы к описанию волновой картины основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и на анализе их асимптотики методом стационарной фазы или на геометрическом построении огибающих волновых фронтов в рамках кинематической теории диспергирующих волн [1, 2, 6, 7]. Такие волновые картины полей могут наблюдаться при дистанционном зондировании, наблюдении и измерениях внутренних гравитационных волн, возбуждаемых различными источниками возмущений в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных вращающихся стратифицированных средах [1, 2, 5, 6, 8].

Как правило, на основе кинематической теории удается сформулировать аналитическое представление только для фазовых поверхностей (линий) [8]. Цель настоящей работы – построение асимптотических решений, описывающих амплитудно-фазовые характеристики дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых движущимся источником возмущений в стратифицированной вращающейся в целом среде конечной толщины.

1. Постановка задачи и интегральные формы решений. Рассмотрим задачу о дальних полях внутренних гравитационных волн, возникающих при обтекании точечного источника возмущений мощности Q , вращающейся в целом с частотой Ω стратифицированной средой толщины H . Источник движется со скоростью V в горизонтальном направлении вдоль оси x , ось z направлена вверх от поверхности, глубина залегания источника – z_0 ; исследуется установившийся режим волновых колебаний. В линейной постановке и с учетом приближения Буссинеска имеем следующее уравнение, например, для вертикального смещения изопикн $\eta(x, y, z)$ (линий равной плотности) [1–4]

$$V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Delta \eta) + f^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + N^2(z) (\Delta_2 \eta) = Q \delta'(x) \delta(y) \delta'(z - z_0) \quad (1.1)$$

$$\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

где $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$ – частота Брента–Вяйсяля, которая далее предполагается постоянной, $\rho_0(z)$ – невозмущенная плотность, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $f = 2\Omega$ – удвоенная частота вращения стратифицированной среды.

Функция $\eta(x, y, z)$ связана с вертикальной компонентой скорости $w(x, y, z)$ соотношением $w(x, y, z) = V \frac{\partial}{\partial x} \eta(x, y, z)$ [3, 4]. В качестве граничных условий используется условие “твердой крышки”

$$\eta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -H \quad (1.2)$$

В безразмерных координатах $x^* = x\pi/H$, $y^* = y\pi/H$, $z^* = z\pi/H$, $\eta^* = \eta H/\pi Q$ уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) переписутся следующим образом (индекс “*” далее опускается):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Delta \eta) + \frac{\varepsilon^2}{M^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{1}{M^2} (\Delta_2 \eta) = \delta'(x) \delta(y) \delta'(z - z_0) \quad (1.3)$$

$$\eta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -\pi$$

где $c = NH/\pi$ – максимальное значение групповой скорости внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды толщины H [3, 4], $M = V/c$, $\varepsilon = f/N$.

Решение (1.3) ищется в форме интеграла Фурье

$$\eta(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu \quad (1.4)$$

Подставив (1.4) в (1.3), для определения функции $\varphi(\mu, \nu, z)$ имеем следующую краевую задачу ($k^2 = \mu^2 + \nu^2$):

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2 M^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi(\mu, \nu, z)}{\partial z^2} + k^2 \left(\frac{1}{(\mu M)^2} - 1\right) \varphi(\mu, \nu, z) = \frac{1}{i\mu} \frac{\partial \delta(z - z_0)}{\partial z_0} \quad (1.5)$$

$$\varphi(\mu, \nu, z) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -\pi$$

Решение задачи (1.5) можно представить в виде суммы вертикальных (нормальных) мод:

$\varphi(\mu, \nu, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mu, \nu, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\mu, \nu) \cos n z_0 \sin n z$, т.е. в виде ряда по собственным функциям однородной краевой задачи (1.5), где $B_n(\mu, \nu) = 2n\mu M^2 / (i\pi(k^2(1 - (\mu M)^2) - n^2((\mu M)^2 - \varepsilon^2)))$.

В результате решение задачи (1.3) имеет вид

$$\eta(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x, y, z) \quad (1.6)$$

$$\eta_n(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\mu, \nu) \exp(-i(\mu x + \nu y)) \cos n z_0 \sin n z d\mu$$

Приравнявая к нулю знаменатель в (1.6), получим дисперсионное соотношение, связывающее горизонтальную μ и вертикальную ν компоненты волнового вектора k

$$\mu^2 M^2 = \frac{k^2 + n^2 \varepsilon^2}{k^2 + n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Разрешая биквадратное уравнение (1.7) относительно μ , получим два действительных корня (дисперсионные кривые)

$$\mu = \pm\mu_n(v), \quad \mu_n(v) = \sqrt{\frac{(m^2 - v^2 - n^2) + \sqrt{(m^2 - v^2 - n^2)^2 + 4(v^2 + \varepsilon^2 n^2)m^2}}{2}} \quad (1.8)$$

и два мнимых корня

$$\mu = \pm i\lambda_n(v), \quad \lambda_n(v) = \sqrt{\frac{(n^2 - m^2 + v^2) + \sqrt{(n^2 - m^2 + v^2)^2 + 4(v^2 + \varepsilon^2 n^2)m^2}}{2}} \quad (1.9)$$

где $m = 1/M$.

В слагаемых (1.6) контур интегрирования по μ смещен в верхнюю полуплоскость комплексной переменной μ . Этим удовлетворяется условие излучения – отсутствие распространения волн вверх по потоку [3, 4]. Замыкая контур интегрирования по μ в верхнюю полуплоскость при $x < 0$ и в нижнюю при $x > 0$ и учитывая вычеты при $\mu = \pm\mu_n(v)$ (1.8) и при $\mu = -i\lambda_n(v)$ (1.9), получим

$$\eta_n(x, y, z) = \begin{cases} J_\lambda \frac{2n}{\pi} \sin nz \cos nz_0, & x < 0 \\ (J_\mu^+ + J_\mu^- - J_\lambda) \frac{2n}{\pi} \sin nz \cos nz_0, & x > 0 \end{cases}$$

$$J_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B_n(v) \exp(-\lambda_n(v)|x|) \cos vy dv$$

$$J_\mu^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty A_n(v) \cos(\mu_n(v)x \pm vy) dv$$

$$A_n(v) = \frac{1}{2} \frac{\mu_n^2(v)M^2}{\mu_n^4(v) + n^2\varepsilon^2 + v^2}, \quad B_n(v) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_n^2(v)M^2}{\lambda_n^4(v) + n^2\varepsilon^2 + v^2}$$

2. Построение асимптотик решений. Далее для определенности рассмотрим первую волновую моду $n = 1$ (опуская ее индекс) и случай $M > 1$, так как в случае $M < 1$ дисперсионные кривые $\mu(v)$ без учета и с учетом вращения стратифицированной среды принципиально не различаются.

Оценим сначала интеграл J_λ . Поскольку $\lambda(v) > 0$ при всех v , то J_λ экспоненциально мал при больших значениях $|x|$, поэтому поведение дальних полей при $x \rightarrow \infty$ определяется интегралами J_μ^+ и J_μ^- , которые равны между собой, так как $\mu(v)$ – четная функция.

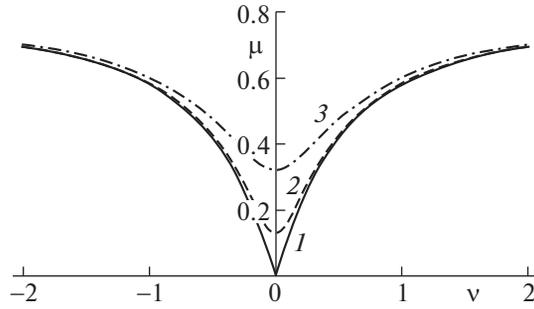
Оценим асимптотики интеграла J_μ^- . В силу симметрии волновой картины относительно оси $0x$ считаем для определенности $y > 0$. Введем $\Phi(v, \rho) = xS(v, \rho)$, $S(v, \rho) = \mu(v) - \rho v$, $\rho = y/x$. Тогда стационарные точки функции $S(v, \rho)$ определяются из уравнения

$$\frac{\partial \Phi(v, \rho)}{\partial v} = 0, \quad \text{или} \quad \mu'(v) = \rho \quad (2.1)$$

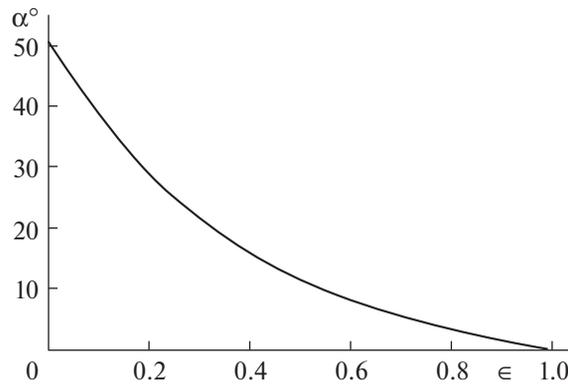
Тогда, добавляя к (2.1) выражение для фазы Φ , можно получить параметрическое семейство линий равной фазы (с параметром v)

$$x(v) = \frac{\Phi}{\mu(v) - \mu'(v)v}, \quad y(v) = \frac{\mu'(v)\Phi}{\mu(v) - \mu'(v)v}$$

При фиксированном значении Φ имеем конкретную линию равной фазы. На фиг. 1 изображена дисперсионная кривая $\mu(v)$ при $M = 1.3$ для случая $\varepsilon = 0$ (1), $\varepsilon = 0.11$ (2), $\varepsilon = 0.3$ (3). Все дисперсионные кривые имеют горизонтальную асимптоту $\mu = 1/M$. Угол полураствора волнового клина α рассчитывается по формуле $\alpha = \text{arctg}(\mu'(v_*))$, где v_* – корень уравнения $\mu''(v) = 0$.



Фиг. 1. Дисперсионная кривая $\mu(v)$ при различных параметрах вращения ε : $1 - 3 - \varepsilon = 0, 0.11, 0.3$



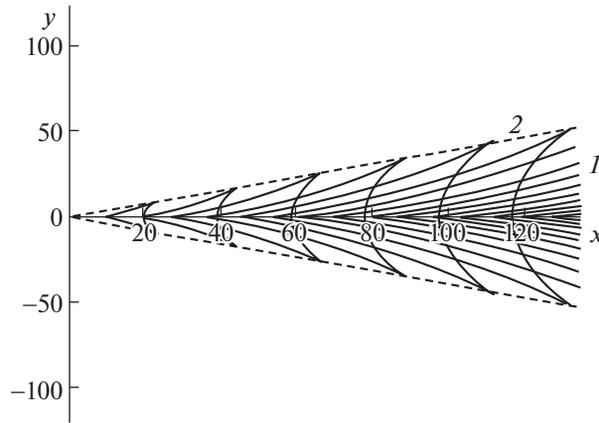
Фиг. 2. Зависимость угла полураствора волнового клина от параметра вращения ε

На фиг. 2 изображена зависимость $\alpha(\varepsilon)$, при этом $\alpha(0) = \arctg(1/\sqrt{M^2 - 1})$. На фигурах 3 и 4 представлены линии равной фазы при $M = 1.3$ для случаев $\varepsilon = 0.3$ и $\varepsilon = 0.11$ соответственно (линии 1). При каждом значении ρ решение уравнения (2.1) дает две стационарные точки: $v_1(\rho)$, $v_2(\rho)$, при этом $v_1 < v_* < v_2$. Продольным линиям равной фазы отвечают стационарные точки $v_* < v_2$, а поперечным — $v_1 < v_*$. На волновом фронте (см. фиг. 3 и 4, линия 2) стационарные точки сливаются, при этом фронт описывается уравнением $y = \mu'(v_*)x$. Расстояния между продольными волнами вдоль оси $0x$ составляют $2\pi M$, а между поперечными — $2\pi/\mu(0)$. С уменьшением частоты вращения стратифицированной среды ε расстояние между поперечными волнами увеличивается, и в пределе $\varepsilon = 0$ поперечные волны отсутствуют, а расстояние между продольными волнами остается неизменным [4, 9]. При малых ε расстояние между поперечными волнами можно рассчитать, используя приближенную формулу $2\pi\sqrt{M^2 - 1}/\varepsilon$ и, например, при $\varepsilon = 0.11$ относительная ошибка не превышает 2%. При больших положительных x неравномерная асимптотика интеграла J_μ^- вычисляется с помощью метода стационарной фазы [3, 4, 9]

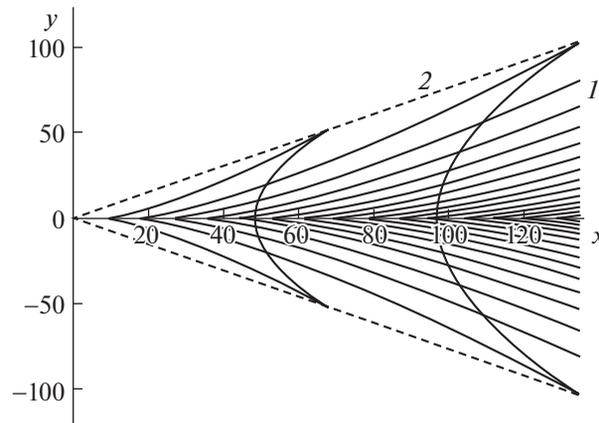
$$J_\mu^- = \frac{A(v_1(\rho)) \cos(xS(v_1(\rho), \rho) + \pi/4)}{\sqrt{2\pi x S''_{vv}(v_1(\rho), \rho)}} + \frac{A(v_2(\rho)) \cos(xS(v_2(\rho), \rho) - \pi/4)}{\sqrt{-2\pi x S''_{vv}(v_2(\rho), \rho)}} \quad (2.2)$$

Неравномерная асимптотика (2.2) неприменима в окрестности волнового фронта, где стационарные точки сливаются, и $S''_{vv}(v, \rho) \rightarrow 0$. Равномерная асимптотика интеграла J_μ^- , применимая как на фронте, так и внутри и вне волнового клина, имеет вид [3, 4, 9]

$$J_\mu^- = \frac{b_0(\rho)}{x^{1/3}} \cos(xa(\rho)) Ai(\sigma(\rho)x^{2/3}) + \frac{b_1(\rho)}{x^{2/3}} \sin(xa(\rho)) Ai'(\sigma(\rho)x^{2/3})$$



Фиг. 3. Линии равной фазы (1) и фронт волны (2) при $\epsilon = 0.3$ ($\alpha = 21.4^\circ$)



Фиг. 4. Линии равной фазы (1) и фронт волны (2) при $\epsilon = 0.11$ ($\alpha = 37.6^\circ$)

$$a(\rho) = \frac{S(v_1(\rho), \rho) + S(v_2(\rho), \rho)}{2}, \quad \sigma(\rho) = \left(\frac{3}{4} (S(v_2(\rho), \rho) - S(v_1(\rho), \rho)) \right)^{2/3} \quad (2.3)$$

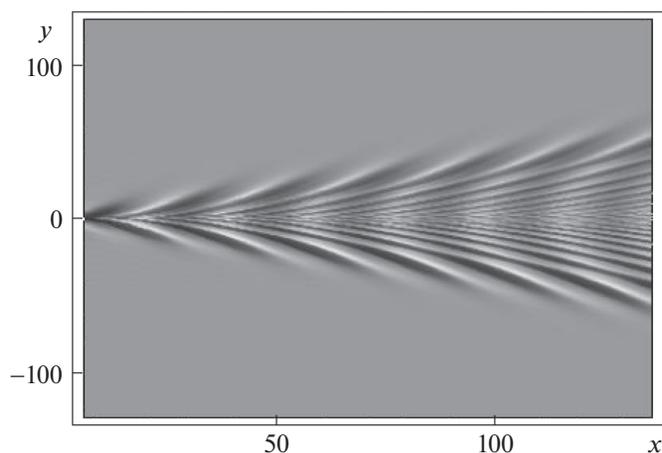
$$b_0(\rho) = \frac{G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma})}{2}, \quad b_1(\rho) = \frac{G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma})}{2\sqrt{\sigma}}$$

$$G(\sqrt{\sigma}) = A(v_2(\rho)) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\rho)}}{S''_{vv}(v_2(\rho), \rho)}}, \quad G(-\sqrt{\sigma}) = A(v_1(\rho)) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\rho)}}{S''_{vv}(v_1(\rho), \rho)}}$$

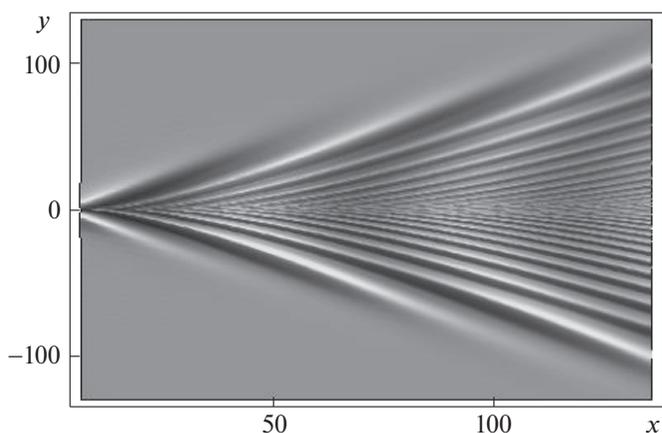
где $Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(xt - \frac{t^3}{3}\right) dt$ – функция Эйри.

Равномерная асимптотика (2.3), выражающаяся через функцию Эйри и ее производную, регулярна в окрестности волнового фронта, где S'_v и S''_{vv} стремятся к нулю. Равномерная асимптотика (2.3) совпадает с неравномерной асимптотикой (2.2), в чем можно убедиться, подставив в выражение (2.3) вместо функции Эйри и ее производной их асимптотики при больших положительных значениях аргумента

$$Ai(x) \sim \frac{1}{x^{1/4} \sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad Ai'(x) \sim \frac{x^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$



Фиг. 5. Возвышение внутренних гравитационных волн от источника во вращающейся стратифицированной среде ($\epsilon = 0.3$, $\alpha = 21.4^\circ$)



Фиг. 6. Возвышение внутренних гравитационных волн от источника во вращающейся стратифицированной среде ($\epsilon = 0.11$, $\alpha = 37.6^\circ$)

Каждое слагаемое в (2.3) состоит из быстроосциллирующего (тригонометрического) множителя и медленно меняющейся амплитуды (функция Эйри и ее производная). На фигурах 5 и 6 приведены результаты расчетов трехмерной картины поля возвышения внутренних гравитационных волн, рассчитанные по (2.3) для $\epsilon = 0.3$ и 0.11 соответственно. Видно, что учет вращения стратифицированной среды как целого приводит к заметному усложнению как амплитудных, так и фазовых характеристик генерируемых дальних волновых полей, а именно к появлению не только продольных, но и поперечных волновых пакетов, отсутствующих в средах без вращения [3, 4].

Заключение. Построенные в работе равномерные асимптотические решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики дальних полей внутренних гравитационных волн от локализованного источника возмущений, движущегося в потоке вращающейся в целом стратифицированной среды конечной толщины как вне, так и внутри соответствующих волновых фронтов.

Полученные асимптотики дальних полей дают возможность не только эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, но и проводить качественный анализ получаемых решений.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00466).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin—Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
2. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. 394 p.
3. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
4. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
5. Актуальные проблемы механики: 50 лет Институту проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. Сб. статей/ Отв. ред. Черноусько Ф.Л. М.: Наука, 2015. 510 с.
6. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // *J. Fluid Mechanics*. 2013. V. 720. P. 104–139.
7. *Rees T., Lamb K.G., Poulin F.J.* Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // *SIAM J. Appl. Math.* 2012. V. 72(4). P. 1041–1060.
8. *Свиркунов П.Н., Калашиник М.В.* Фазовые картины волн от локализованных источников, движущихся относительно стратифицированной вращающейся среды (перемещающийся ураган, орографическое препятствие) // Докл. РАН. Механика. 2012. Т. 447. № 4. С. 396–400.
9. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 6. С. 26–34.