

ДИНАМИКА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

© 2012 г. В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Представлено академиком Р.И. Нигматулиным 23.11.2011 г.

Поступило 30.11.2011 г.

На распространение внутренних гравитационных волн в океане существенное влияние оказывают неоднородности гидрофизических полей (в частности, поле плотности), так и изменение рельефа дна. При этом точные аналитические решения волновых задач получаются только в случае, если распределение плотности воды и форма дна описываются достаточно простыми модельными функциями. Когда характеристики среды и границы произвольны, можно построить только численные решения таких задач. Однако последнее не позволяет качественно анализировать характеристики волновых полей, особенно на больших расстояниях, что необходимо для решения, например, проблемы обнаружения внутренних волн дистанционными методами, в том числе с помощью средств аэрокосмической радиолокации. В этом случае описание и анализ волновой динамики можно осуществить на основе асимптотических моделей и аналитических методов их решения с помощью предлагаемого модифицированного метода геометрической оптики.

Рассматривается задача о дальних полях внутренних гравитационных волн, распространяющихся в морской среде конечной глубины с изменяющимся рельефом. Неоднородность поля плотности моделируется постоянным распределением частоты Брента–Вяйсяля: $N = \text{const}$.

В линейном приближении система уравнений, описывающих малые колебания первоначально покоящейся стратифицированной среды (ось z направлена вертикально вниз) имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{U} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \text{grad} p + G &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} w &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (u_1, u_2, w)$, p , ρ – возмущения вектора скорости, давления, плотности, $\rho_0(z)$ – плотность среды в невозмущенном состоянии, $G = (0, 0, g\rho)$,

g – ускорение силы тяжести. С использованием приближения Буссинеска рассматривается слой воды с параметром $N^2(z) = \frac{-gd \ln \rho_0}{dz} = \text{const}$, ограниченный сверху ($z = 0$) “твердой крышкой” ($w = 0$) и дном $z = -H(y)$, где выполняется условие непротекания $w + \frac{dH}{dy} u_2 = 0$. Важно отметить, что эти

приближения хорошо описывают основные параметры морской среды в шельфовых районах Арктического бассейна [2, 3].

В реальных условиях моря можно предположить, что функция $H(y)$ – гладкая плавно меняющаяся функция. Плавность изменения $H(y)$ означает, что отношение характерного горизонтального масштаба L изменения $H(y)$ к характерному вертикальному масштабу M изменения амплитуд внутренних волн определяется как $\lambda = \frac{L}{M} \gg 1$, что фактически означает малый наклон дна. В этих же условиях неоднородность рельефа дна можно смоделировать одним возвышением, т.е. функцию $H(y)$ представить с одним максимумом.

Решение (1) для вертикальной скорости найдем в виде

$$w = \exp(-i\omega t + ilx)W(z, y),$$

где ω – частота, l – горизонтальное волновое число вдоль оси x , т.е. поперек волновода. Решения более общего вида в силу линейности задачи получаются суперпозицией полученных асимптотических представлений. В безразмерных переменных

$$x^R = \frac{x}{L}, \quad y^R = \frac{y}{L}, \quad z^R = \frac{z}{M}, \quad l^R = lM,$$

$$\omega^R = \frac{\omega}{N}, \quad h(y) = \frac{H(Ly)}{M}$$

(индекс R далее опускается) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{\lambda^2 c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{l^2}{c^2} W &= 0, \\ W &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$W + \frac{dh(y)}{\lambda dy} u_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = -h(y), \quad c^2 = \frac{\omega^2}{1 - \omega^2}.$$

Если профиль дна линейный ($z = -\gamma y$, $\gamma = \frac{1}{\lambda}$ – наклон дна), задача (2) в нулевом приближении (т.е. граничное условие на дне принимает вид $W = 0$ при $z = -h(y)$) имеет аналитическое решение [5]

$$W = \sum W_n, \\ W_n = e^{-i\pi v/2} K_v \left(l \sqrt{\lambda^2 y^2 - \frac{z^2}{c^2}} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{\ln \Delta} \ln \frac{\lambda c y - z}{\lambda c y + z} \right),$$

где $\Delta = \frac{\lambda c + 1}{\lambda c - 1}$, $v = \frac{2\pi n i}{\ln \Delta}$, K_v – функция Макдональда мнимого индекса v .

Если профиль дна отличен от линейного, решение (2) ищется в типичном для метода геометрической оптики виде [4]

$$W = \left(F_0(z, y, \omega) + \frac{i}{\lambda} F_1(z, y, \omega) + \left(\frac{i}{\lambda} \right)^2 F_2(z, y, \omega) + \dots \right) e^{i\lambda S(y, \omega)},$$

где функции F_0, F_1 определяются из соотношений

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial z^2} + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + l^2 \right) \frac{F_0}{c^2} = 0, \\ F_0 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad -h(y), \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + l^2 \right) F_1/c^2 = \frac{1}{c^2} \left(2 \frac{\partial F_0}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} + F_0 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right), \\ F_1 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad -h(y).$$

Решение первого уравнения из (3) дает модовую структуру решения с дисперсионным соотношением

$$\kappa_n^2(y, \omega) = \frac{c^2 n^2 \pi^2}{h^2(y)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и собственными функциями в нулевом приближении (вертикальные моды)

$$F_{0n}(z, y, \omega) = A_{0n}(y, \omega) \sin \frac{n\pi z}{h(y)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда эйконал $S_n(y, \omega)$ определяется из соотношения

$$\kappa_n^2(y, \omega) = \left(\frac{\partial S_n}{\partial y} \right)^2 + l^2.$$

Амплитуда $A_{0n}(y, \omega)$ находится из условия разрешимости второго уравнения из (3), которое требует ортогональности правой части этого уравнения и функции F_{0n} :

$$A_{0n} = \frac{B_{0n}(y_0, \omega)}{\sqrt[4]{c^2 n^2 \pi^2 - h^2(y) l^2}},$$

где постоянная B_{0n} зависит от ω и начального значения эйконала в какой-либо точке y_0 , $S_n(y_0, \omega)$. Эйконал $S_n(y, \omega)$ определяется выражением

$$S_n(y, \omega) = \int_y^{y^*} \sqrt{\kappa_n^2(y, \omega) - l^2} dy,$$

где y^* – точка поворота, т.е. корень уравнения $\kappa_n^2(y, \omega) = l^2$.

Геометрическое место точек поворота определяет каустику, в окрестности которой происходит качественное изменение свойств волновых полей, а именно, переход из области “света”, т.е. области существования волновых полей, в область “тени”, где эти поля экспоненциально малы. Тогда решение в приближении геометрической оптики для отдельной волновой моды до точки поворота, т.е. в волновой зоне, имеет вид

$$W_n = \sqrt{2\pi} Q_n \cos \left(\lambda S_n(y, \omega) - \frac{\pi}{4} \right), \\ Q_n = \frac{\sin \frac{n\pi z}{h(y)}}{\lambda^{1/2} \sqrt[4]{c^2 n^2 \pi^2 - h^2(y) l^2}}.$$

За точкой поворота (в зоне экспоненциального затухания) это решение представимо в виде

$$W_n = \sqrt{\pi} Q_n \exp(-\lambda |S_n(y, \omega)|).$$

Тогда равномерная асимптотика решения, применимая в окрестности точки поворота, представляется выражением

$$W_n = \sqrt{2\pi} \left(\frac{3}{2} \lambda S_n(y, \omega) \right)^{1/6} Q_n \text{Ai} \left(\left(\frac{3}{2} \lambda S_n(y, \omega) \right)^{2/3} \right),$$

где $\text{Ai}(x)$ – функция Эйри.

На рис. 1, 2 приведены результаты расчетов вертикальной скорости для двух типичных профилей дна океана, отличных от линейного и наблюдаемых в океане в районе Арктического бассейна [2, 3]. На рис. 1 представлены результаты расчетов линии уровня первой моды $W_1(z, y)$ для модели медленно понижающегося профиля дна. В этом случае $h(0) = 0$, и для любого значения ω при заданном волновом числе l существует точка поворота y^* и присутствуют только захваченные волны. На рис. 2 приведены результаты расчетов линии уровня второй моды $W_2(z, y)$ для профиля дна в виде гладкого возвышения. В этом случае $h(0) = h_0 \neq 0$, $h(\infty) = h_\infty$. Тогда существует частота отсечки $\omega_0 = \Omega(h(0))$,

$$\Omega(h) = \frac{lh}{\sqrt{n^2 \pi^2 + l^2 h^2}},$$

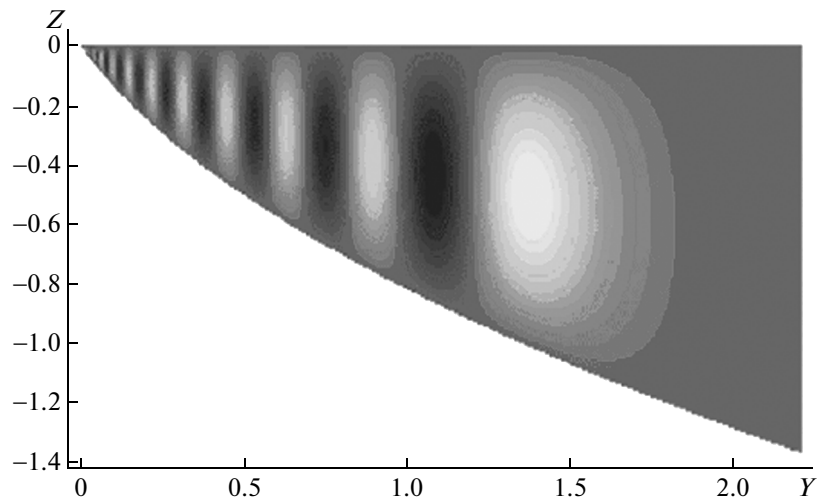


Рис. 1. Первая мода вертикальной скорости над понижающимся профилем дна.

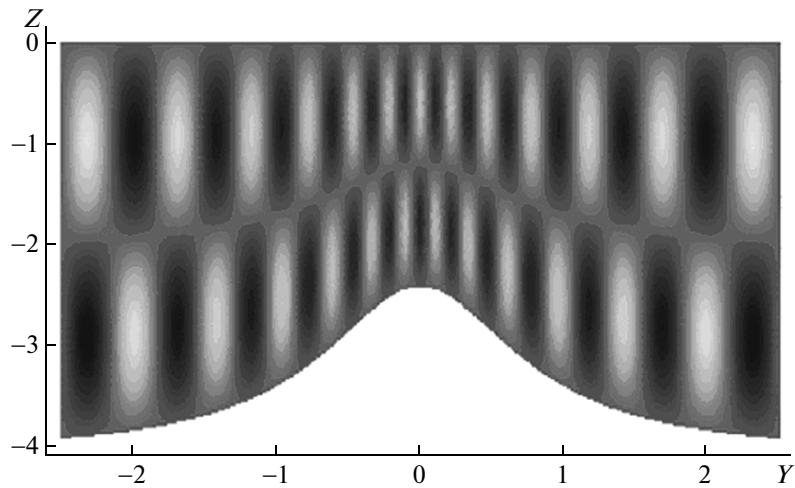


Рис. 2. Вторая мода вертикальной скорости над одиночным возвышением.

такая что волн с частотой $\omega < \omega_0$ не существует. При $\omega_0 < \omega < \omega_*$ ($\omega_* = \Omega(h_{co})$) существует дискретный спектр, где каждой частоте ω_n отвечает захваченная волна. При $\omega_* < \omega < 1$ точек поворота нет, спектр по ω непрерывен и присутствуют прогрессивные волны.

Таким образом, показано, что в зависимости от формы дна и структуры стратификации морской среды могут проявляться различные особенности в параметрах дальних полей внутренних волн. Выявлен эффект пространственно-частотного “запирания” волнового поля для реального океанического шельфа. В зависимости от частотных характеристик волнового поля и геометрии рельефа дна дальние поля внутренних волн или локализируются в некоторой ограниченной пространственной области (захваченные волны), или рас-

пространяются при отсутствии точек поворота на достаточно большие по сравнению с глубиной моря расстояния (прогрессивные волны). Пространственная область, куда проникают прогрессивные волны, полностью определяется наличием точек поворота, местоположение которых зависит от стратификации среды и неоднородностей рельефа дна.

Построенные асимптотические решения являются равномерными и позволяют описывать дальние поля внутренних волн как вблизи, так и вдали от точек поворота. Универсальный характер предложенного асимптотического метода моделирования дальних полей внутренних волн позволяет эффективно рассчитывать волновые поля и, кроме того, качественно анализировать полученные решения. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин

в целом, что важно и для правильной постановки математических моделей волновой динамики, и для проведения оценок при натурных измерениях волновых полей в морской среде. Особая роль предлагаемых асимптотических методов обусловлена тем обстоятельством, что параметры природных стратифицированных сред, как правило, известны приближенно, и попытки их точного численного решения по исходным уравнениям гидродинамики с использованием таких параметров могут привести к заметной потере точности получаемых результатов. Помимо фундаментального интереса полученные асимптотические построения представляют значительную ценность для практики, поскольку предложенный модифицированный метод геометрической оптики позволяет решать задачи моделирования волновых полей в широком классе приложений.

В заключение авторы выражают признательность Н.Н. Корчагину за ценные замечания и помощь в постановке и обсуждении результатов работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11–01–003350_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
2. *Grue J., Sveen J.K.* // Ocean Dynamics, 2010. V. 60. P. 993–1006.
3. *Писарев С.В.* // Океанология. 1996. Т. 36. № 6. С. 819–826.
4. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
5. *Wunsch C.* // Deep-Sea Res. 1968. V. 15. P. 251–258.