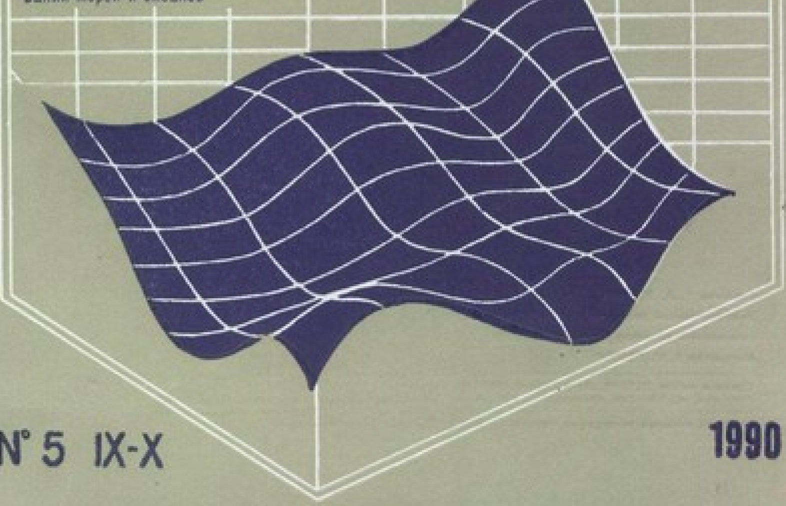
ISSN 0233-7584

МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

- Термогидродинамика океана
- Анализ результатов наблюдений и методы расчета гидрофизических полей океана
- Экспериментальные и экспедиционные исследования
- Спутниковая гидрофизика
- Математическое моделирование морских систем
- Автоматизация научных исследований морей и океанов



№ 5 IX-X 1990

УДК 551.466

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в нестационарных средах

Методом «бегущей волны» решена задача о распространении внутренних волн Эйри и Френеля в нестационарных стратифицированных средах. Для определения положения волновых фронтов получено уравнение эйконала. Найдены законы сохранения, позволяющие определить эволюцию во времени ширины и амплитуды волн. Численно решена задача о распространении волны Эйри от точечного источника массы, движущегося в нестационарной среде.

В условиях реального океана частота Брента—Вяйсяля $N^2 = -g\partial \ln \rho/\partial z$, где g — ускорение свободного падения; ρ — невозмущенная плотность, определяющая основные характеристики внутренних гравитационных волн (ВВ), зависит не только от пространственных переменных x, y, z, но также и от времени t. Наиболее характерными видами изменчивости N^2 во времени являются поднятие и опускание термоклина, изменение его ширины и т. п. [1]. Существует несколько временных масштабов изменчивости гидрофизических полей в океанах и морях: мелкомасштабная с периодами до десятка минут, мезомасштабная с периодами порядка суток, а также синоптическая и глобальная изменчивости с периодами от месяцев до нескольких лет [1]. В дальнейшем будем рассматривать распространение ВВ в нестационарных средах, параметры которых имеют период изменения сутки и более, что позволяет использовать приближение геометрической оптики (ГО) [2], так как период ВВ составляет десятки минут и менее.

Распространение ВВ в нестационарных неоднородных по горизонтали стратифицированных средах в приближении ГО рассматривалось в [2]. В [3] методом «бегущей волны», который является обобщением метода ГО, была решена задача о распространении внутренних волн Эйри и Френеля в стратифицированной неоднородной по горизонтали среде.

В настоящей работе с помощью метода, изложенного в [3], решается задача о распространении внутренних волн Эйри и Френеля в стратифицированной по вертикали нестационарной среде. Волны Эйри и Френеля возникают в задаче о движении источника в слое стратифицированной жидкости с различными видами распределения $N^2(z)$, независящими от времени [4, 5]. В [4] для стационарного распределения $N^2(z)$ в конечном слое жидкости с жесткими границами показано, что решение для вертикальной компоненты w скорости ВВ состоит из отдельных мод, каждая из которых в окрестности волнового фронта выражается через производную функции Эйри. Аргумент последней зависит от первых двух коэффициентов тейлоровского разложения дисперсионной кривой в нуле. В случае конечного стратифицированного слоя жидкости с большим подстилающим однородным слоем асимптотика отдельной моды вблизи волнового фронта выражается через интегралы Френеля [5].

Система линеаризованных уравнений гидродинамики, когда невозмущенная плотность ρ зависит от переменных z и t, сводится к одному уравнению, например для вертикальной скорости $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial \ln \rho}{\partial z}\frac{\partial^2}{\partial t \partial z}\right]w=g\frac{\partial \ln \rho}{\partial z}\Delta w$, где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Пренебрегая членом с $\partial \ln \rho/\partial z$, получим уравнение в приближении Буссинеска $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w+N^2(z, t)\Delta w=0$.

Кажется естественным пренебречь также и членом с $\partial \ln \rho/\partial t$, что соответствовало бы последовательному применению гипотезы Буссинеска. Это заключается в том, что плотность, характеризующая инертную массу жидкости, может считаться постоянной. Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w+N^2(z, t)\Delta w=0. \tag{1}$$

Полученное уравнение отличается от обычного уравнения внутренних волн в стационарной среде только параметрическим вхождением времени t в частоту Брента—Вяйсяля. Вопрос о возможности использования приближения Буссинеска по времени обсуждается в [6].

Решение (1) ищется в виде суммы мод, каждая из которых распространяется независимо от других (адиабатическое приближение). Мы будем рассматривать одну, отдельно взятую моду, опуская ее индекс. Далее нас будет интересовать только область вблизи волнового фронта, т. е. будем рассматривать только время t, близкое ко времени прихода фронта волны, обозначаемого в дальнейшем через τ. Это означает, что используется слабодисперсионное приближение.

Рассмотрим волну Эйри, распространяющуюся в слое стратифицированной жидкости $-H<z<0$ с частотой Брента—Вяйсяля $N^2(z, t)$. Будем искать решение (1) с граничными условиями $w=0$, $z=0$, $-H$ в виде

$$w=\left[A(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon, z)+\frac{\partial A(\varepsilon x, \varepsilon y, \tau, z)}{\partial \tau}(\varepsilon t-\tau)+\ldots\right]F_0(\varphi)+ \tag{2}$$

$$+\varepsilon^p\left[B(\varepsilon x, \varepsilon y, \tau, z)+\frac{\partial B(\varepsilon x, \varepsilon y, \tau, z)}{\partial \tau}(\varepsilon t-\tau)+\ldots\right]F_1(\varphi)-O(\varepsilon^{2p}),$$

$$F'_{m+1}(\varphi)=F_m(\varphi),$$

где $p=2/3$; $\tau=\tau(\varepsilon x, \varepsilon y)$; $F_0(\varphi)=A_i'(\varphi)$ — производная функции Эйри, аргумент которой $\varphi=\alpha(\varepsilon x, \varepsilon y)(\varepsilon t-\tau(\varepsilon x, \varepsilon y))\varepsilon^{-p}$ порядка единицы. Функция τ описывает положение волнового фронта, функция α — эволюцию ширины волны Эйри, малый параметр ε характеризует «медленные переменые». Так как нас интересуют только «медленные времена» εt, близкие ко времени прихода волнового фронта τ, то все функции, стоящие перед функциями F_m, представляются в виде тейлоровских рядов по степеням $\varepsilon t-\tau\sim\varepsilon^p$.

Представим $N^2(z, \varepsilon t)$ в виде

$$N^2(z, \varepsilon t)=N^2(z, \tau)+\frac{\partial N^2(z, \tau)}{\partial \tau}(\varepsilon t-\tau)+O(\varepsilon^{2p}). \tag{3}$$

Подставляя разложения (2) и (3) в (1) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получим при ε^p

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + |\nabla\tau|^2 N^2(z,\tau) A = 0, \tag{4}$$

$$A = 0,\ z = 0,\ -H, \tag{5}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$. Собственную функцию задачи (4) — (5) удобно представить в виде $A(x, y, \tau, z) = \Psi(x, y) f(z, \tau)$, где $f(z, \tau)$ удовлетворяет условию нормировки $\int\limits_{-H}^{0} N^2(z, \tau) f^2(z, \tau)\, dz = 1$.

Собственные функции $f(z, \tau)$ и собственные числа $\lambda(\tau) \equiv |\nabla\tau|$ задачи (4) — (5) предполагаются известными, тогда для определения τ имеем уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 \equiv r^2 + q^2 = \lambda^2(\tau) \tag{6}$$

Соответствующая характеристическая система для уравнения эйконала (6) имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = rc^2(\tau),\quad \frac{dr}{d\tau} = -\frac{c'(\tau)}{c(\tau)}\, r,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = qc^2(\tau),\quad \frac{dq}{d\tau} = -\frac{c'(\tau)}{c(\tau)}\, q. \tag{7}$$

Здесь $c(\tau) \equiv \lambda^{-1}(\tau)$ — максимальная скорость длинных волн.

Для определения функций α и Ψ приравняем после подстановки в уравнение (1) разложений (2) и (3) члены порядка ε^{2p}. Получим

$$\lambda^4(\tau)\, a(\tau) + \nabla\alpha\nabla\tau + \alpha\lambda^{-1}(\tau)\,\nabla\lambda(\tau)\,\nabla\tau = 0, \tag{8}$$

$$\nabla\left(\frac{\Psi^2 c^4}{\alpha^4}\right)\nabla\tau + \Delta\tau = 0,$$

$$a(\tau) = \int\limits_{-H}^{0} f^2(z, \tau)\, dz.$$

Для определения Ψ имеем следующий закон сохранения вдоль характеристик (7):

$$\frac{\Psi^2 c^3 R}{\alpha^4} = \mathrm{const}, \tag{9}$$

где геометрическая расходимость лучей R связана с якобианом D, описывающим переход от пространственных переменных x, y к лучевым координатам τ и τ_0 посредством соотношения $D = Rc$.

На характеристиках (7) уравнение (8) сводится к уравнению Бернулли $\frac{d\alpha}{d\tau} + \frac{1}{\lambda(\tau)}\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\alpha = -\alpha^4 a(\tau)$, решение которого имеет вид $\alpha(x, y) = c(\tau)\left[\frac{3}{2}\int\limits_{\tau_0(x,y)}^{\tau(x,y)} a(t)\, c^3(t)\, dt\right]^{-1/3}$.

Рассмотрим теперь волну Френеля, распространяющуся в слое стратифицированной жидкости толщиной H с частотой Брента—Вяйсяля $N^2(z, t)$, лежащем на большом однородном слое с $N^2(z, t) = 0$. Будем искать решение, например для возвышения η $(w = \partial\eta/\partial t)$. В качестве граничных условий берется $\eta = 0$ на поверхности $z = 0$ и $|\partial\eta/\partial z| = |\nabla\eta|$ — на границе стратифицированного слоя $z = -H$. Последнее условие обеспечивает экспоненциальное затухание решения с глубинной. Решение для η ищется в виде

$$\eta = \operatorname{Re}\eta^*, \tag{10}$$

$$\eta^* = \left[A(\varepsilon x, \varepsilon y, \tau, z) + \frac{\partial A(\varepsilon x, \varepsilon y, \tau, z)}{\partial \tau}(\varepsilon t - \tau) + \ldots\right] F_0(\varphi) +$$

$$+ i\varepsilon^p \left[B(\varepsilon x, \varepsilon y, \tau, z) + \frac{\partial B(\varepsilon x, \varepsilon y, \tau, z)}{\partial \tau}(\varepsilon t - \tau) + \ldots\right] F_1(\varphi) +$$

$$+ i\varepsilon^p \left[C(\varepsilon x, \varepsilon y, \tau, z) + \frac{\partial C(\varepsilon x, \varepsilon y, \tau, z)}{\partial \tau}(\varepsilon t - \tau) + \ldots\right] F_{-1}(\varphi) + O(\varepsilon^{2p}),$$

$$F_0(\varphi) = \int_0^\infty \exp\left(-it\varphi - i\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

где $p = 1/2$; все остальные обозначения здесь и далее сохранены, за исключением оговариваемых особо. Подставляя разложения (3) и (10) в уравнение (1), получим для определения τ уравнение эйконала (6), где $\lambda(\tau)$ определяется из уравнения (4) с граничными условиями $A=0$, $z=0$, $\frac{\partial A}{\partial z}=0$, $z=-H$. На характеристиках уравнения эйконала имеем закон сохранения $\frac{\Psi c R}{\alpha^2} = \mathrm{const}$.

Функция α будет решением соответствующего уравнения Бернулли $\alpha(x, y) = c(\tau)\left[\int\limits_{\tau_0(x,y)}^{\tau(x,y)} b(t)\, c^3(t)\, dt\right]^{-1/2}$, $b(\tau) = f^2(-H, \tau)$.

Рассмотрим волну Эйри, возникающую при движении точечного источника массы в конечном слое стратифицированной жидкости с жесткими границами. Предположим, что источник движется в положительном направлении оси x со скоростью V на глубине z_0. В качестве параметра интегрирования системы (7) берется эйконал τ. Решением системы (7) является однопараметрическое семейство функций $x(\tau, \tau_0)$, $y(\tau, \tau_0)$, $r(\tau, \tau_0)$, $q(\tau, \tau_0)$; первые две функции определяют на плоскости x, y луч, τ_0 — начальный эйконал или, что то же самое, время выхода луча из источника. Пусть в момент времени $\tau = \tau_0$ источник находится в точке $(x(\tau_0), y(\tau_0)) = (V\tau_0, 0)$, тогда для определения функций $r(\tau_0)$, $q(\tau_0)$ получим систему уравнений

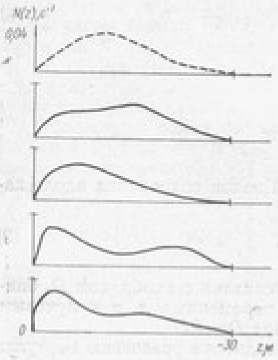


Рис. 1. Изменчивость $N(z, t)$ во времени

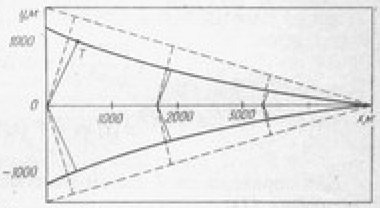


Рис. 2. Фронты и лучи первой моды волны Эйри

$$r^2(\tau_0) + q^2(\tau_0) = c^{-2}(\tau_0), \tag{11}$$

$$\frac{dx(\tau_0)}{d\tau_0} r(\tau_0) + \frac{dy(\tau_0)}{d\tau_0} q(\tau_0) = 1. \tag{12}$$

Уравнение (11) — есть уравнение эйконала (6) в момент времени $\tau = \tau_0$, уравнение (12) получается путем дифференцирования начального эйконала $\tau_0(x, y)$ по τ_0. Из (11)—(12) находим функции $r(\tau_0)$, $q(\tau_0)$, отношение которых $q(\tau_0)/r(\tau_0)$ определяет тангенс угла между лучом, выходящим в момент времени $\tau = \tau_0$ из точки $(V\tau_0, 0)$, и осью x. Тогда начальные данные для системы (7) будут следующие:

$$x(\tau_0) = V\tau_0, \quad r(\tau_0) = 1/V, \tag{13}$$

$$y(\tau_0) = 0, \quad q(\tau_0) = \sqrt{c^{-2}(\tau_0) - V^{-2}}.$$

Решая систему (7) с начальными данными (13), получим уравнения лучей

$$x(\tau, \tau_0) = V\tau_0 + \frac{c(\tau_0)}{V} \int_{\tau_0}^{\tau} c(t)\, dt, \tag{14}$$

$$y(\tau, \tau_0) = c(\tau_0) \sqrt{c^{-2}(\tau_0) - V^{-2}} \int_{\tau_0}^{\tau} c(t)\, dt.$$

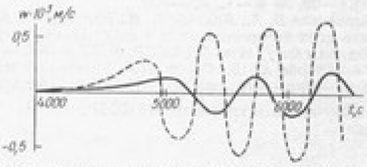


Рис. 3. Вертикальная скорость волны Эйри

Из (14) следует, что лучи — это прямые линии, наклон которых зависит от времени выхода луча τ_0. При фиксированном τ имеет фронт волны, при фиксированном τ_0 — луч. Обращая уравнения (14), найдем: $\tau = \tau(x, y)$, $\tau_0 = \tau_0(x, y)$. Для прямолинейного и равномерного движения точечного источника массы можно определить значение константы в правой части уравнения (9), в дальнейшем обозначаемой через $P(\tau_0)$. Значение $P(\tau_0)$ находится из задачи с постоянной во времени частотой Брента — Вяйсяля [4]

$$P(\tau_0) = \frac{c^5(\tau_0)}{4\sqrt{V^2 - c^2(\tau_0)}} \left(\frac{\partial f(z_0, \tau_0)}{\partial z_0}\right)^2. \tag{15}$$

Геометрическая расходимость лучей R для равномерно и прямолинейно движущегося источника имеет вид

$$R(x, y) = \frac{c'(\tau_0)}{\sqrt{V^2 - c^2(\tau_0)}} \int_{\tau_0(x,y)}^{\tau(x,y)} c(t)\, dt + \sqrt{V^2 - c^2(\tau_0)}. \tag{16}$$

Используя (15), (16), можно выписать явный вид первого члена волны Эйри при движении точечного источника массы в нестационарной среде:

$$w = \frac{c^{5/2}(\tau_0)\, \alpha^2(x, y) f(z, \tau)}{2c^{3/2}(\tau) R^{1/2}(x, y) (V^2 - c^2(\tau_0))^{1/4}} \frac{\partial f(z_0, \tau_0)}{\partial z_0} \mathrm{Ai}'\left(\alpha(x, y) \frac{t - \tau(x, y)}{\varepsilon^{2/3}}\right) + O(\varepsilon^{4/3}).$$

Для численных расчетов использовались данные об изменчивости частоты Брента—Вяйсяля [1].

На рис. 1 представлены профили $N(z, t)$ с временным промежутком 4 ч, для которых проводились расчеты. В качестве стационарного использовалось распределение $N(z)$, изображенное штриховой линией. На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов первой моды для нестационарного (сплошная линия) и стационарного (штриховая линия) случаев при следующих значениях параметров: $V = 1$ м/с, $\tau_0 = 0$, $\tau =$

$=5000$ с, $z=-10$ м, $z_0=-20$ м. На рис. 2 приведены результаты расчетов лучей и фронтов, на рис. 3 — вертикальной скорости w в фиксированной точке пространства T.

Таким образом, решение задачи о распространении внутренних волн Эйри и Френеля в стратифицированной нестационарной среде и проведенные на основе решения этой задачи численные расчеты показывают, что изменчивость частоты Брента—Вяйсяля во времени может заметно сказываться на характере распространения ВВ. Поэтому при решении задач о распространении ВВ наряду с вертикальной стратификацией и зависимостью N^2 от горизонтальных переменных необходимо учитывать также изменчивость частоты Брента—Вяйсяля во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изменчивость* гидрофизических полей Черного моря. / Под ред. Б. А. Нелепо.— Л.: Гидрометеоиздат, 1984.—240 с.
2. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.—302 с.
3. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в неоднородной по горизонтали среде // Мор. гидрофиз. жур.—1989.— № 6.— С. 14—19.
4. *Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я.* Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. ФАО.— 1984.—**20**, № 6.— С. 526—532.
5. *Боровиков В. А., Булатов В. В., Кельберт М. Я.* О промежуточной асимптотике дальнего поля внутренних волн в слое стратифицированной жидкости, лежащем на однородном слое // Изв. АН СССР. МЖГ.—1988.— № 3.— С. 158—162.
6. *Владимиров Ю. В., Фрост В. А.* Внутренние волны в нестационарных условиях.— М., 1989.—38 с.— (Препринт // АН СССР. Ин-т проблем механики).

Институт проблем механики АН СССР,
Москва

Материал поступил
в редакцию 27.06.89
После доработки 10.01.90

ABSTRACT A problem on the propagation of internal Airy and Fresnel waves in unsteady stratified media is solved by the running wave method. An eikonal equation is derived for the determination of the location of wave fronts. Conservation laws are obtained which allow to determine the evolution of the width and wave amplitude with time.