

УДК 551.511:532.527

## ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

© 2013 г. В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН  
119526 Москва, пр. Вернадского, 101-1

E-mail: bulatov@index-xx.ru

Поступила в редакцию 09.02.2012 г., после доработки 18.10.2012 г.

Построены асимптотические представления решений, описывающих дальние поля внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде переменной глубины. Выявлен эффект пространственно-частотного “запирания” волнового поля для реального океанического шельфа. В зависимости от частотных характеристик волнового поля и геометрии рельефа дна дальние поля внутренних волн или локализируются в некоторой ограниченной пространственной области (захваченные волны), или распространяются при отсутствии точек поворота на достаточно большие по сравнению с глубиной моря расстояния (прогрессивные волны). Пространственная область, куда проникают прогрессивные волны, полностью определяется наличием точек поворота, местоположения которых зависят от стратификации среды и неоднородностей рельефа дна.

**Ключевые слова:** внутренние гравитационные волны, стратифицированные среды, метод геометрической оптики.

DOI: 10.7868/S0002351513030036

На распространение внутренних гравитационных волн в океане существенное влияние оказывают как неоднородности гидрофизических полей (в частности, поле плотности), так и изменение рельефа дна. При этом точные аналитические решения волновых задач получаются только в случае, если распределение плотности воды и форма дна описываются достаточно простыми модельными функциями. Когда характеристики среды и границы произвольны, можно построить только численные решения таких задач. Однако последнее не позволяет качественно анализировать характеристики волновых полей, особенно на больших расстояниях, что необходимо для решения, например, проблемы обнаружения внутренних волн дистанционными методами, в том числе с помощью средств аэрокосмической радиолокации. В этом случае описание и анализ волновой динамики можно осуществить на основе асимптотических моделей и аналитических методов их решения с помощью модифицированного метода геометрической оптики.

Рассматривается задача о дальних полях внутренних гравитационных волн, распространяющихся в стратифицированной среде конечной глубины с изменяющимся рельефом. В линейном приближении система уравнений, описывающих

малые колебания первоначально покоящейся стратифицированной среды (ось  $z$  направлена вертикально вниз), имеет вид [1–3]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{grad} p + \mathbf{G} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} w &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, w)$ ,  $p, \rho$  – возмущения вектора скорости, давления, плотности;  $\rho_0(z)$  – плотность среды в невозмущенном состоянии;  $\mathbf{G} = (0, 0, g\rho)$ ,  $g$  – ускорение силы тяжести. В приближении Буссинеска рассматривается слой стратифицированной среды с параметром  $N^2(z) = -gd \ln \rho_0 / dz = \text{const}$ , сверху ( $z = 0$ ) ограниченный “твердой крышкой” ( $w = 0$ ) и дном  $z = -H(y)$ , где выполняется условие непротекания:  $w + \frac{dH}{dy} u_2 = 0$ .

Далее вводится характеристический вертикальный масштаб  $M$ , тогда  $N^2 M / g \equiv \lambda^{-1} \ll 1$ , в реальном океане  $\lambda^{-1} \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ . Действительно, если частота Брента–Вайсяля и глубина дна постоянны, имеем  $\lambda^{-1} = N^2 H^2 / gH = \pi^2 c_{\max}^2 / c^2$ , где

$c = \sqrt{gH}$  – скорость длинных поверхностных волн, а  $c_{\max} = NH/\pi$  – максимальная групповая скорость внутренних волн. В реальном океане  $c \sim 100$  м/с,  $c_{\max} \sim 1$  м/с [1–3]. Предположим, что функция  $H(y)$  – гладкая, плавноменяющаяся функция, имеющая не более одного минимума. Плавность изменения  $H(y)$  означает, что отношение горизонтального масштаба  $L$  изменения  $H(y)$  и вертикального масштаба  $M$  характеризуется величиной  $\lambda = L/M \gg 1$ , что фактически означает малый наклон дна. В этих же условиях неоднородность рельефа дна можно смоделировать одним возвышением, т.е. функцию  $H(y)$  представить с одним максимумом. Эти приближения (постоянная стратификация  $N \approx 10^{-2} - 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , рельеф дна с уклоном не более  $10^\circ$ ) могут быть наблюдаемы в определенных районах Мирового океана [4, 5].

Решение (1) для вертикальной скорости ищется в виде:  $w = \exp(-i\omega t + ilx)W(z, y)$ , где  $\omega$  – частота,  $l$  – горизонтальное волновое число. Решения более общего вида в силу линейности задачи получаются суперпозицией полученных асимптотических представлений [1, 6, 7]. В безразмерных переменных  $x^R = x/L$ ,  $y^R = y/L$ ,  $z^R = z/M$ ,  $l^R = lM$ ,  $\omega^R = \omega/N$ ,  $h(y) = H(Ly)/M$  (индекс “R” далее опускается) имеем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{\lambda^2 b^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + l^2 W = 0, \quad W = 0, \text{ при } z = 0, \quad (2)$$

$$W + \frac{dh(y)}{\lambda dy} u_2 = 0, \text{ при } z = -h(y), \quad b^2 = \frac{\omega^2}{1 - \omega^2}.$$

Если профиль дна линейный ( $h(y) = -\gamma y$ ,  $\gamma = 1/\lambda$  – наклон дна), задача (2) в нулевом приближении (т.е. граничное условие на дне принимает вид  $W = 0$  при  $z = -h(y)$ ) имеет аналитическое решение [8]:

$$W = \sum W_n, \quad W_n = \exp\left(-i \frac{\pi \eta}{2}\right) \times K_\eta \left( l \sqrt{\lambda^2 y^2 - \frac{z^2}{b^2}} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ln \Delta} \ln \frac{\lambda b y - z}{\lambda b y + z}\right),$$

где  $\Delta = \frac{\lambda b + 1}{\lambda b - 1}$ ,  $\eta = \frac{2\pi n i}{\ln \Delta}$ ,  $K_\eta$  – функция Макдональда мнимого индекса  $\eta$ .

Для нелинейного профиля дна, решение (2) ищется в типичном для метода геометрической оптики виде [6, 7]:

$$W = \left( F_0(z, y, \omega) + \frac{i}{\lambda} F_1(z, y, \omega) + \left(\frac{i}{\lambda}\right)^2 F_2(z, y, \omega) + \dots \right) \times \exp(i\lambda S(y, \omega)),$$

где функции  $F_0, F_1$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_0}{\partial z^2} + \left( \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + l^2 \right) F_0 / b^2 &= 0, \\ F_0 &= 0 \text{ при } z = 0, -h(y), \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \left( \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + l^2 \right) F_1 / b^2 &= \frac{1}{b^2} \left( 2 \frac{\partial F_0}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} + F_0 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right), \\ F_1 &= 0 \text{ при } z = 0, -h(y). \end{aligned} \quad (3)$$

Решение первого уравнения из (3) дает модовую структуру волны с дисперсионным соотношением:  $\kappa_n^2(y, \omega) = \frac{b^2 n^2 \pi^2}{h^2(y)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и собственными функциями в нулевом приближении (вертикальные моды):

$$F_{0n}(z, y, \omega) = A_{0n}(y, \omega) \sin \frac{n\pi z}{h(y)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда эйконал  $S_n(y, \omega)$  определяется из соотношения:

$$\kappa_n^2(y, \omega) = \left( \frac{\partial S_n}{\partial y} \right)^2 + l^2.$$

Амплитуда  $A_{0n}(y, \omega)$  находится из условия разрешимости второго уравнения из (3), которое требует ортогональности правой части этого уравнения и функции  $F_{0n}$ :

$$A_{0n} = \frac{B_{0n}(y_0, \omega)}{\sqrt[4]{b^2 n^2 \pi^2 - h^2(y) l^2}},$$

где постоянная  $B_{0n}$  зависит от  $\omega$  и начального значения эйконала в какой-либо точке  $y_0$ ,  $S_n(y_0, \omega)$ . Эйконал  $S_n(y, \omega)$  определяется выражением:

$$S_n(y, \omega) = \int_y^{y^*} \sqrt{\kappa_n^2(y, \omega) - l^2} dy,$$

где  $y^*$  – точка поворота, т.е. корень уравнения  $\kappa_n^2(y, \omega) = l^2$ .

Геометрическое место точек поворота определяет каустику, в окрестности которой происходит качественное изменение свойств волновых полей, а именно, переход из области “света”, т.е. области существования волновых полей, в область “тени”, где эти поля экспоненциально малы. Как известно, каустика с геометрической точки зрения есть огибающая семейства лучей, или характеристик, вдоль которых строится асимптотическое решение. Асимптотики волнового поля вблизи каустики описывают качественное изменение свойств исследуемых волновых полей. Формальные приближения геометрической оптики, а также их модификации становятся неприменимыми

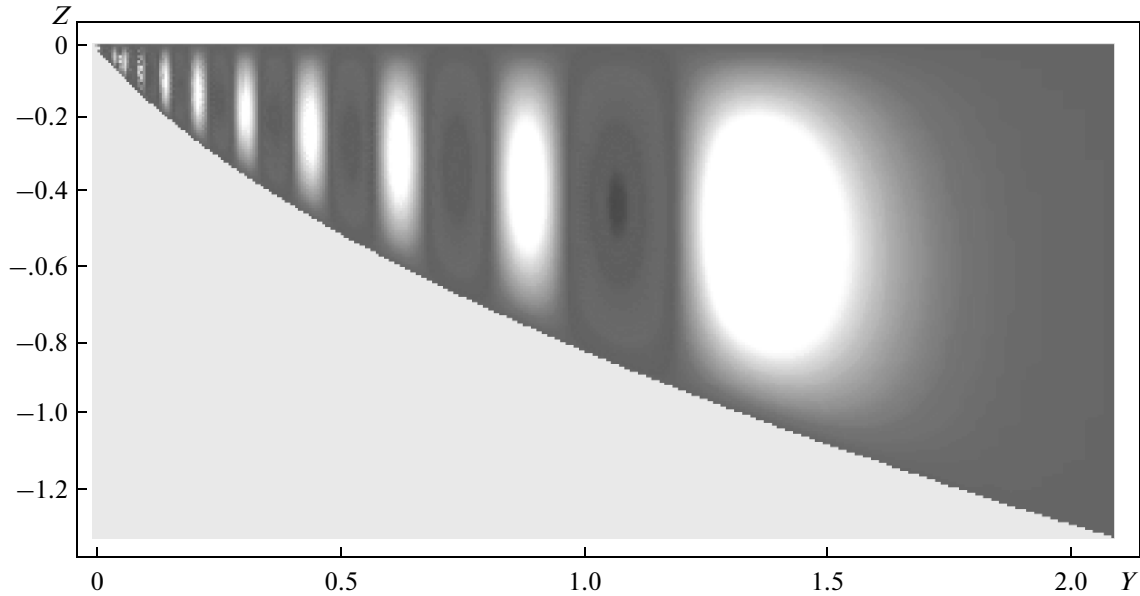


Рис. 1. Первая мода вертикальной скорости над понижающимся профилем дна.

вблизи каустических поверхностей. Для того чтобы найти волновое поле вблизи каустики, необходимо строить специальные разложения решений, и, например, использовать метод эталонных интегралов для построения равномерных асимптотик интегрального представления волнового поля. Помимо большого физического интереса эти асимптотические построения могут представлять значительную ценность для приложений, поскольку метод геометрической оптики, модифицированный с учетом поля на каустике, позволяет описать волновые поля в весьма широком классе задач [1, 6].

Тогда решение в приближении геометрической оптики для отдельной волновой моды дальнего поля внутренних гравитационных волн до точки поворота, т.е. в волновой зоне, имеет вид:

$$W_n = \sqrt{2\pi} Q_n \cos\left(\lambda S_n(y, \omega) - \frac{\pi}{4}\right), \quad (4)$$

$$Q_n = \frac{\sin(n\pi z/h(y))}{\lambda^{1/2} \sqrt{b^2 n^2 \pi^2 - h^2(y) l^2}}.$$

За точкой поворота (в зоне экспоненциального затухания) это решение представимо в виде:

$$W_n = \sqrt{\pi} Q_n \exp(-\lambda |S_n(y, \omega)|). \quad (5)$$

Равномерная асимптотика решения, применимая в окрестности точки поворота, представляется выражением:

$$W_n = \sqrt{2\pi} \left(\frac{3}{2} \lambda S_n(y, \omega)\right)^{1/6} Q_n Ai\left(\left(\frac{3}{2} \lambda S_n(y, \omega)\right)^{2/3}\right), \quad (6)$$

где  $Ai(x)$  — функция Эйри. Полученные решения (6) при больших значениях аргумента функции Эйри  $\lambda S_n(y, \omega)$  (вдали от каустики) совпадают с решениями (4), (5) соответственно. Таким образом, построенные решения (6) в наиболее общем виде описывают дальнейшее поле внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде переменной глубины.

На рис. 1–4 приведены результаты расчетов вертикальной скорости для двух типичных профилей дна океана, отличных от линейного [4, 5]. На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов линии уровня первой  $W_1(z, y)$  и второй  $W_2(z, y)$  волновых мод соответственно для модели медленно понижающегося профиля дна для значения  $\omega = 0.55$ . В этом случае  $h(0) = 0$ , и для любого  $\omega$  при заданном волновом числе  $l$  существует точка поворота  $y^*$ , и присутствуют только захваченные волны. На рис. 3, 4 приведены результаты расчетов линии уровня второй моды  $W_2(z, y)$  для профиля дна в виде гладкого возвышения. В этом случае  $h(0) = h_0 \neq 0$ ,  $h(\infty) = h_\infty$ . Тогда существует частота отсечки  $\omega_0 = \Omega(h(0))$ ,  $\Omega(h) = \frac{lh}{\sqrt{n^2 \pi^2 + l^2 h^2}}$  такая, что волн с частотой  $\omega < \omega_0$  не существует. При  $\omega_0 < \omega < \omega_*$  ( $\omega_* = \Omega(h_\infty)$ ) существует дискретный спектр, где каждой частоте  $\omega_n$  отвечает захваченная волна. Частоты  $\omega$ , принадлежащие дискретным наборам, находятся методом “стрельбы” при

численном решении уравнений  $\frac{\partial W_n(z, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$

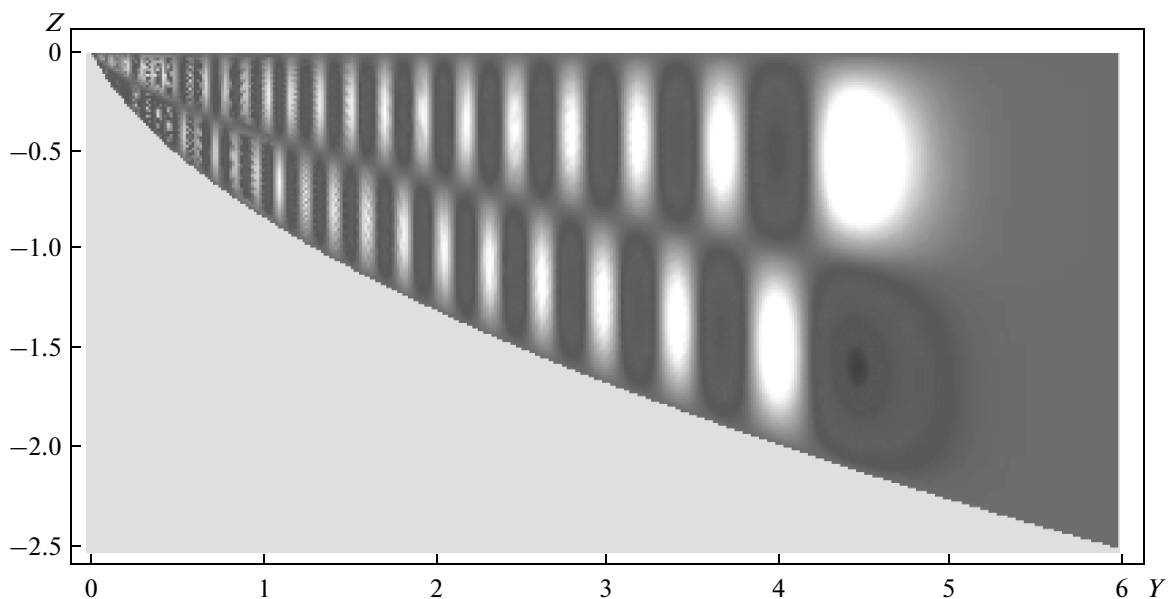


Рис. 2. Вторая мода вертикальной скорости над понижающимся профилем дна.

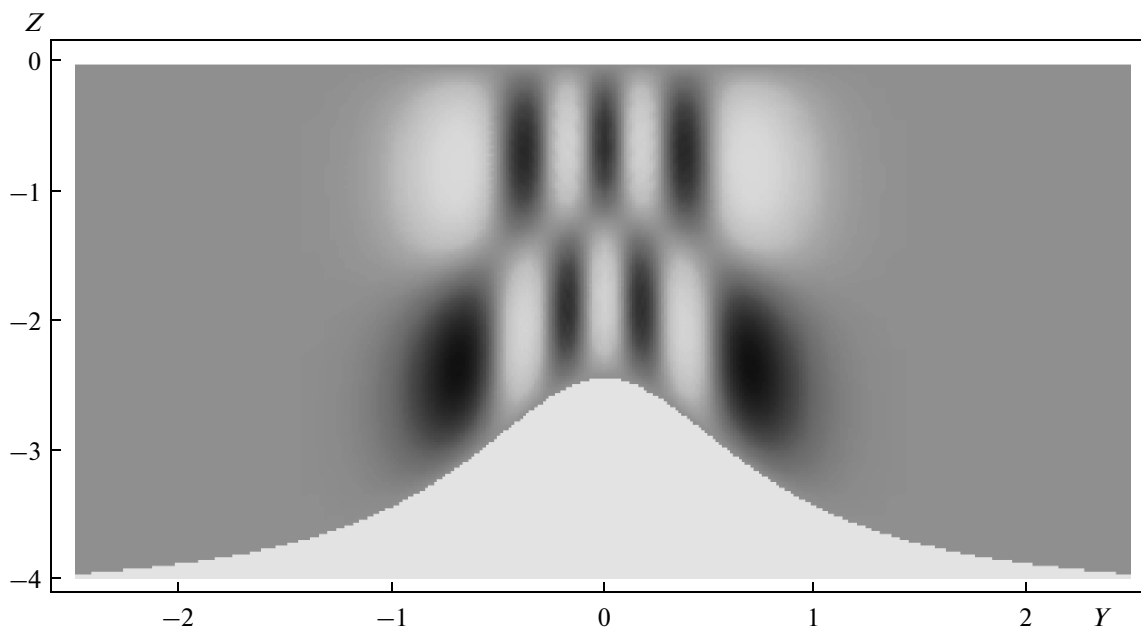


Рис. 3. Вторая мода вертикальной скорости над одиночным возвышением (захваченные волны).

для фиксированного  $z$ ,  $n$  – номер моды [1]. Результаты расчетов захваченных волн второй волновой моды  $W_2(z, y)$  изображены на рис. 3 для значений  $\omega_0 = 0.238$ ,  $\omega_* = 0.384$ ,  $\omega = 0.312$ . При  $\omega_* < \omega < 1$  точек поворота нет, спектр по  $\omega$  непрерывен и присутствуют прогрессивные волны, ре-

зультаты расчетов второй волновой моды  $W_2(z, y)$  представлены на рис. 4 для значений  $\omega = 0.4$ .

Таким образом, показано, что в зависимости от формы дна и структуры стратификации морской среды могут проявляться различные особенности в параметрах дальних полей внутренних волн. Выявлен эффект пространственно-частот-

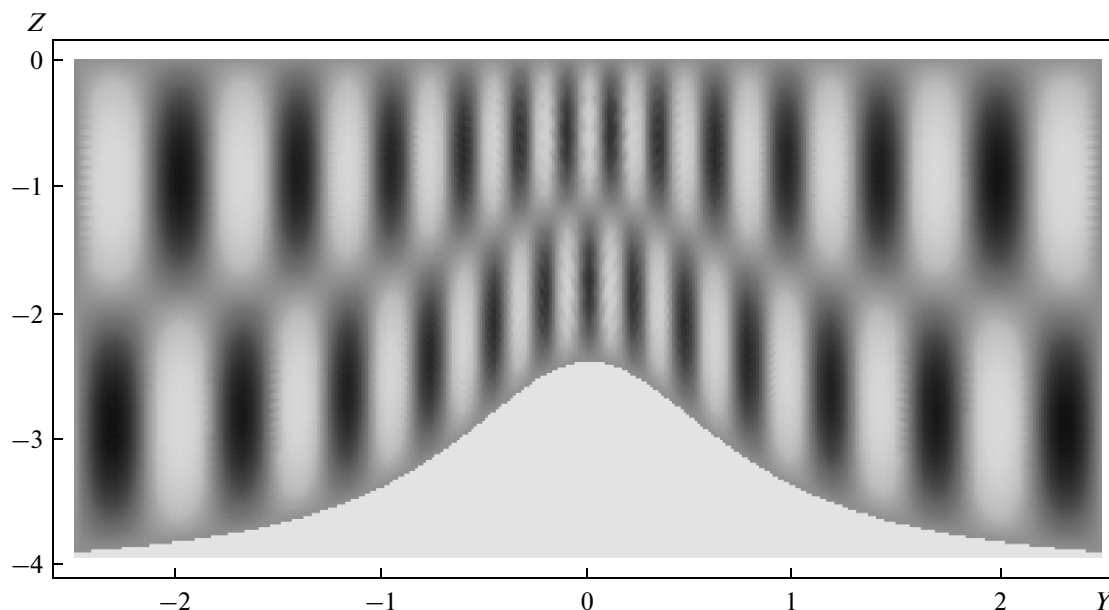


Рис. 4. Вторая мода вертикальной скорости над одиночным возвышением (прогрессивные волны).

ного “запирания” волнового поля для реального океанического шельфа. В зависимости от частотных характеристик волнового поля и геометрии рельефа дна дальние поля внутренних волн или локализируются в некоторой ограниченной пространственной области (захваченные волны), или распространяются при отсутствии точек поворота на достаточно большие по сравнению с глубиной моря расстояния (прогрессивные волны). Пространственная область, куда проникают прогрессивные волны, полностью определяется наличием точек поворота, местоположения которых зависят от стратификации среды и неоднородностей рельефа дна.

Построенные асимптотические решения являются равномерными и позволяют описывать дальние поля внутренних волн как вблизи, так и вдали от точек поворота. Универсальный характер предложенного асимптотического метода моделирования дальних полей внутренних волн позволяет эффективно рассчитывать волновые поля и, кроме того, качественно анализировать полученные решения. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно и для правильной постановки математических моделей волновой динамики, и для проведения экспресс-оценок при натурных измерениях волновых полей в морской среде, в том числе когда стратификация океана плохо известна.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 11-01-00335, 13-05-00151, 13-05-00171).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
2. Sutherland B.R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
3. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика неоднородных сред. Т. 2. Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. М.: Наука, 2009. 426 с.
4. Писарев С.В. Низкочастотные внутренние волны у кромки шельфа Арктического бассейна // Океанология. 1996. Т. 36. № 6. С. 819–826.
5. Grue J., Sveen J.K. A scaling law of internal run-up duration // Ocean Dynamics. 2010. V. 60. P. 993–1006.
6. Babich V.M., Buldyrev V.S. Asymptotic methods in short-wavelength diffraction theory. Oxford: Alpha Science, 2007. 480 p.
7. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. The uniform asymptotic form of the internal gravity wave field generated by a source moving above a smoothly varying bottom // J. Engin. Mathem. 2011. V. 69. Issue 2. P. 243–260.
8. Wunsch C. On the propagation of internal waves up a slope // Deep-Sea Res. 1968. V. 15. P. 251–258.

# Far Fields of Internal Gravity Waves in a Stratified Liquid of Varying Depth

V. V. Bulatov and Yu. V. Vladimirov

*Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

*e-mail: bulatov@index-xx.ru*

Received February 9, 2012; in final form October 18, 2012

**Abstract**—Asymptotic representations of solutions describing the far fields of internal gravity waves in a stratified medium of varying depth are constructed. The effect of space-frequency cutoff of the wave field for a real oceanic shelf is revealed. Depending on frequency characteristics of the wave field and bottom topography, far fields of internal waves either are located in a certain confined space domain (trapped waves) or propagate in the absence of turning points over sufficiently large distances when compared with the sea depth (progressive waves). The space domain where the progressive waves penetrate is fully determined by the presence of turning points whose locations depend on the medium stratification and inhomogeneities of bottom topography.

*Keywords:* internal gravity waves, stratified media, method of geometrical optics.