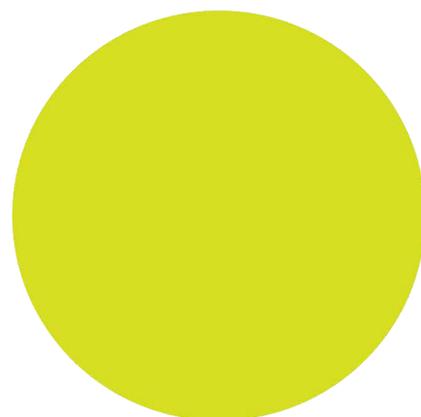


В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров

НОВЫЕ ЗАДАЧИ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ПОВЕРХНОСТНЫХ  
ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Монография



ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ.А.Ю.ИШЛИНСКОГО РАН

В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров

НОВЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Монография

Киров, 2017

УДК 517.958: 530.145.7

ББК 22.161.6

H766

Рецензент: Н.Н. Корчагин, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук

**H766** Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Новые задачи математической теории поверхностных волновых возмущений: монография [Электронный ресурс]. – Электрон. текст. дан. (1 файл 6.1 Мб). – Киров: МЦНИП, 2017. –1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-00090-125-0. – Загл. с этикетки диска.

Монография посвящена изложению новых задач математической теории поверхностных волновых возмущений неоднородных сред. В монографии исследованы основные математические модели, описывающие процессы возбуждения и распространения поверхностных гравитационных волн, изложены асимптотические методы исследования дальних волновых полей, предложены методы математического моделирования волновой динамики природных сред, связанные с теоретическим изучением процессов возбуждения, распространения поверхностных гравитационных волн в этих средах. Приведены результаты численного моделирования динамики поверхностных гравитационных волн для реальных океанологических условий. Значительное место в монографии уделено сравнению получаемых аналитических результатов с данными натурных измерений гидрофизических полей в океане. Монография предназначена для специалистов в области гидрофизики, прикладной математики, математического моделирования, гидродинамики, океанологии.

ISBN 978-5-00090-125-0

Материалы публикуются в авторской редакции. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов

Перепечатка материалов осуществляется по разрешению редакционной коллегии

© МЦНИП, 2017

© Булатов В.В., Владимиров Ю.В.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>3</b>
<b>1.ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....</b>	<b>17</b>
<b>2.ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ДВУХСЛОЙНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ.....</b>	<b>49</b>
<b>3.МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕХНОСТНЫХ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ ИСТОЧНИКОВ В ПОТОКЕ: СВОБОДНАЯ ГРАНИЦА И «ТВЕРДАЯ КРЫШКА».....</b>	<b>73</b>
<b>4.ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ИСТОЧНИКОВ ДВУХСЛОЙНЫМ ПОТОКОМ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ.....</b>	<b>105</b>
<b>5.РАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДАЛЬНИХ ПОЛЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ИСТОЧИКА В ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ.....</b>	<b>147</b>
<b>6.ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ.....</b>	<b>165</b>

<b>7.ГИБРИДНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ОТ ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ.....</b>	<b>181</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>197</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>227</b>
<b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ.....</b>	<b>289</b>

# **ВВЕДЕНИЕ**



Волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться обтеканием искусственных препятствий, например, погруженных частей платформ, с которых осуществляется добыча углеводородов, проложенных в море трубопроводов, иных сложных гидротехнических сооружений. Практический интерес к воздействию морских течений на подводные препятствия обусловлен тем, что при наличии стратификации водной толщи обтекаемое потоком препятствие генерирует как внутренние, так и поверхностные волны и, следовательно, оно испытывает дополнительное волновое сопротивление, расчет которого необходим при проектировании различных сооружений. С другой стороны, эти поверхностные возмущения несут информацию, как о самих источниках возмущений, так и о характеристиках морской среды, и они могут быть зарегистрированы с помощью специальных средств, прежде всего, радиолокационных и оптических систем. Для дальнейшего развития методов контролирующего мониторинга морских акваторий, основанных на данных, получаемых средствами дистанционного зондирования поверхности моря, важно знать, как зависит характер генерируемых подводными источниками поверхностных волн от стратификации потока и его глубины.

Генерации поверхностных волн от обтекаемых подводных препятствий в однородных и стратифицированных средах посвящены многочисленные исследования как в лабораторных опытах, так и в рамках теоретических работ. В этой ситуации может показаться, что полнота исследования данной

гидродинамической проблемы практически достигнута. Однако результаты теоретических решений задач о генерации поверхностных возмущений представлены в основном в самой общей интегральной форме, и их трудно проанализировать из-за сложных подынтегральных выражений. В этом случае общие интегральные решения дополнительно требуют разработки специальных методов их анализа и получения достаточно простых аналитических выражений, допускающих проведение на их основе численных расчетов параметров поверхностного волнения.

Проведенный анализ работ по рассматриваемой теме показал, что в природных средах и, прежде всего, в водах Мирового океана, есть еще не полностью изученные гидродинамические явления. Это относится к области влияния плотностных неоднородностей морской среды, особенностей рельефа дна и глубины моря на параметры поверхностных возмущений, возникающих при обтекании глубинных препятствий. Следует учесть, что в реальных условиях моря в структуре стратификации морской среды характерны проявления относительно резких перепадов плотности воды, связанные с наличием сезонного термоклина или иных часто возникающих скачков плотности. Поэтому представляет интерес исследование влияния плотностных неоднородностей воды на параметры поверхностных возмущений, особенно при обтекании препятствий вблизи скачков плотности. И здесь практически важно рассмотреть задачу о различии параметров поверхностных возмущений в

зависимости от местоположения препятствия относительно скачка плотности: над скачком или под ним .

На состояние свободной поверхности океана влияют как находящиеся в толще воды неоднородности (обтекаемые препятствия, изменения рельефа дна, полей плотности и течений), так и различные источники возмущений. Для правильной интерпретации данных, полученных при дистанционном зондировании морской поверхности, нужно знать причины, вызывающие те или иные поверхностные явления. В настоящее время актуальной остается задача исследования процессов поверхностных колебаний в неоднородной по плотности и нестационарной морской среде и согласования результатов моделирования с видимыми поверхностными волнениями. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой поверхностных возмущений неоднородных и нестационарных природных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей. Эти модели, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы.

Система уравнений гидродинамики, описывающая поверхностные возмущения в общем виде представляет достаточно сложную математическую задачу как в плане доказательств теорем существования и единственности решений в соответствующих функциональных классах, так и с вычислительной точки зрения. В рамках линейной теории для аналитического исследования

поверхностных волновых возмущений используются методы интегрального представления Маслова, приближенные методы геометрической оптики, а в некоторых случаях также уравнения в конформных переменных. Основные результаты решений задач о генерации поверхностных волновых возмущений представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки асимптотических методов их анализа, допускающих качественный анализ и проведение экспресс оценок получаемых решений. Кроме того, для анализа данных дистанционного зондирования морской поверхности необходимы знания причин, вызывающие те или иные поверхностные явления. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой поверхностных возмущений неоднородных и нестационарных природных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей. Трехмерность структуры поверхностного морского волнения также играет существенную роль, и в настоящее время не имеется возможность проведения масштабных вычислительных экспериментов по моделированию трехмерных океанических течений на больших временах с достаточной точностью. В ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. Эти модели и методы в дальнейшем входят в тот набор «блоков», из которых складывается общая картина волновой динамики. В этой связи необходимо отметить классические задачи

гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованными источниками в тяжелой однородной жидкости. Построенные модельные решения позволяют в дальнейшем, с использованием средств компьютерной математики, получить асимптотические представления волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред

В настоящей монографии рассмотрена структура поверхностных возмущений, которые возникают при обтекании подводных препятствий потоком стратифицированной жидкости конечной глубины. В качестве препятствия рассматривается точечный диполь, локализованный в окрестности слоя скачка плотности как над ним, так и под ним. В частности показано, что скачок плотности может вызывать блокирующий эффект при распространении возмущений от обтекаемого препятствия к поверхности воды.

Обтекание подводных неоднородностей (или препятствий) в морской среде приводит к возникновению возмущений, которые могут выходить на поверхность воды. При этом наличие стратификации среды и ее особенности могут обуславливать определенные эффекты в формировании структуры поверхностных возмущений. В реальных условиях открытого моря такими особенностями являются относительно резкие перепады плотности воды, связанные, прежде всего, с наличием сезонного термоклина или иных скачков плотности воды. В этом случае представляет интерес исследование возможных пикноклиных эффектов при обтекании препятствия в окрестности таких

скачков плотности. И здесь большое значение имеют различия в положении препятствия относительно слоя скачка плотности воды (над или под ним). Один из способов моделирования находящегося в потоке препятствия основан на его замене эквивалентной системой гидродинамических особенностей (источников, стоков, вихрей, мультиполей). В соответствии с этим расчет поверхностных возмущений может быть сведен к расчету волн, генерируемых моделирующими препятствие гидродинамическими особенностями .

Постановка задачи обтекания твердого тела потоком жидкости включает в себя задание граничных условий на его поверхности. Даже в предположении об идеальности жидкости и потенциальности обтекающего тело потока нахождение поля его скорости представляет собой весьма сложную задачу. Существенно проще решается задача обтекания системы точечных гидродинамических особенностей (источников, стоков, диполей и т.п.), поскольку в этом случае нет необходимости удовлетворять наперед заданным граничным условиям. На линиях (поверхностях) тока, возникающих при обтекании такой системы, условия непротекания удовлетворяются автоматически. Это обстоятельство используется при решении задач обтекания тел или непроницаемых границ, моделируемых специально подобранными системами гидродинамических особенностей.

При таком подходе к задачам обтекания тел линии (поверхности) тока отождествляются с непроницаемыми границами. Например, при стационарном обтекании точечного источника равномерным безграничным потоком

возникает линия (поверхность) тока, представляющая собой границу затупленного тела бесконечной длины. Поэтому можно сказать, что обтекание точечного источника гидродинамически эквивалентно обтеканию такого тела. В другом случае источник и сток, расположенные друг за другом вдоль по потоку, моделируют тело овоидной формы. Диполь в безграничном плоском потоке порождает охватывающую его линию тока в форме окружности, поэтому он моделирует поперечное обтекание цилиндра. Обтекание диполя безграничным пространственным потоком эквивалентно обтеканию шара. Перечисленные гидродинамические особенности часто используются при решении модельных задач, в которых точное воспроизведение формы помещенного в поток тела не имеет решающего значения.

Подобный метод, в значительной мере, относится к задаче о генерации поверхностных волн движущимся в жидкости телом. Замена тела некоторым набором гидродинамических особенностей существенно упрощает решение этой задачи. Так, известно решение задачи о цилиндре, движущемся под свободной поверхностью жидкости. В предположении о малости радиуса цилиндра по сравнению с глубиной его погружения замена цилиндра диполем позволяет найти поверхностную волну и волновое сопротивление цилиндра, что позволяет при достаточно большой глубине погружения цилиндра, приближенно заменить его точечным вихрем. Методу замены тела, движущегося под свободной поверхностью жидкости, системой гидродинамических особенностей и изучению обтекания таких особенностей

потоком со свободной границей посвящены большое число работ, в том числе уточняющих поправки с учетом нелинейности граничных условий на поверхности.

Естественно возникает вопрос о том, как влияет наличие границ потока на картину линий тока, возникающих при обтекании заданных гидродинамических особенностей. Например, можно ли считать диполь в плоском потоке со свободной границей хорошей моделью кругового цилиндра? Из физических соображений очевидно, что чем глубже находится диполь, тем точнее он моделирует цилиндр. По мере приближения диполя к свободной поверхности потока охватывающая его линия тока будет искажаться все значительнее и все менее точно соответствовать контуру поперечного сечения кругового цилиндра. Поэтому при рассмотрении ограниченных потоков весьма желательно знать какое именно тело моделирует заданная система гидродинамических особенностей. В настоящей монографии исследуются линии тока, возникающие при обтекании источника и диполя плоским равномерным потоком под твердой крышкой и со свободной границей.

В решении модельной задачи обтекания подводного препятствия двухслойным потоком бесконечной глубины показано, что в реальных условиях моря за препятствием возможно образование двух типов поверхностных волн. Волны первого типа (поверхностная мода, обусловленная свободной поверхностью) образуются при любых значениях скорости набегающего потока  $V$  и слабо зависят от стратификации среды. В морских

условиях визуально они начинают проявляться лишь при относительно больших значениях  $V$  (не менее  $6\text{ м/с}$ ). Параметры волн второго типа (внутренняя мода, обусловленная слоем скачка плотности) существенным образом зависят от мощности скачка и в морских условиях такие волны образуются при скорости  $V$ , не превышающей  $1-1.5\text{ м/с}$ . Обнаружены существенные различия между параметрами поверхностных волн при локализации обтекаемого препятствия над скачком плотности и под ним. Этот эффект указывает на характерную роль скачка как естественной неоднородности, блокирующей выход возмущений на поверхность воды, что представляется важным при использовании такого эффекта в практических задачах, в частности, контролирующем мониторинге морских акваторий. В условиях этой задачи установлен характер влияния фактора конечности глубины моря на параметры поверхностных возмущений. Сравнение параметров поверхностных возмущений, генерируемых обтеканием подводного препятствия потоками конечной и бесконечной глубины, выявило их существенные различия, которые также необходимо учитывать при решении практических задач.

Выявлена также особая роль скорости потока в формировании поверхностных возмущений при реальных условиях моря. Так, возмущения на свободной границе проявляются на двух разнесенных интервалах скорости потока, а в промежуточной зоне от значений критической скорости внутренней моды до значимой величины поверхностной моды они отсутствуют, т.е. эта

зона представляется закрытой для выхода глубинных возмущений на поверхность воды. Следуя принятой в морской гидроакустике терминологии, такой промежуточный интервал можно определить как “зону тени” для выхода на поверхность подобных гидродинамических возмущений.

При анализе общего решения задачи об обтекании препятствия потоком двухслойной жидкости конечной глубины в виде сложной интегральной формы разработана оригинальная методика вычисления такого интеграла. В результате получено решение задачи в аналитическом виде с возможностью последующего численного расчета параметров соответствующих поверхностных волн.

Промышленная деятельность по освоению природных ресурсов (нефть, газ) на континентальном шельфе, в том числе в районе Арктического бассейна является одной из важнейших причин по изучению внутренних и поверхностных волн. Суда и платформы, ведущие бурение или строительство на глубине, используют длинные тубы, связывающие их с морским дном. Строители подводных конструкций часто сталкиваются с воздействием волн и сильных поверхностных течений. Зафиксированы случаи, когда волны большой амплитуды деформируют морские технологические конструкции. Такие потери, в силу дороговизны морских платформ могут нанести существенный экономический ущерб, и как следствие, необходим постоянный оперативный мониторинг и контроль за воздействием волн на подводные сооружения.

Разработка методов расчета и анализа воздействия внутренних волн на морские трубопроводы помогает избежать этих дорогостоящих натурных наблюдений.

Рассмотрена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений от локализованного источника в тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Полученные решения позволяют описать волновые возмущения как внутри, так и вне волнового клина Кельвина и выражаются через функцию Эйри и ее производные. Также изложена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений от локализованного пульсирующего источника в тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Волновая картина возбуждаемых полей представляет собой сумму волн двух типов: кольцевидных и клиновидных. Полученные решения описывают волновые возмущения вдали от пульсирующего источника возмущений как внутри, так и вне волновых клиньев Кельвина. В заключение рассмотрена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений от локализованного гармонического источника в потоке тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Показано, что волновая картина возбуждаемых дальних полей при определенных параметрах генерации представляет собой систему гибридных волновых возмущений, одновременно обладающих свойствами волн двух типов: кольцевидных (поперечных) и клиновидных (продольных). Изучены особенности фазовой структуры и волновых фронтов возбуждаемых полей. Построены равномерные асимптотики решений, описывающие

гибридные поверхностные волновые возмущения вдали от гармонического источника.

## **1.ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ**



Волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться обтеканием искусственных препятствий, например, погруженных частей платформ, с которых осуществляется добыча углеводородов, проложенных в море трубопроводов, иных сложных гидротехнических сооружений. Практический интерес к воздействию морских течений на подводные препятствия обусловлен тем, что при наличии стратификации водной толщи обтекаемое потоком препятствие генерирует как внутренние, так и поверхностные волны и, следовательно, оно испытывает дополнительное волновое сопротивление, расчет которого необходим при проектировании различных сооружений. С другой стороны, эти поверхностные возмущения несут информацию, как о самих источниках возмущений, так и о характеристиках морской среды, и они могут быть зарегистрированы с помощью специальных средств, прежде всего, радиолокационных и оптических систем. Для дальнейшего развития методов контролирующего мониторинга морских акваторий, основанных на данных, получаемых средствами дистанционного зондирования поверхности моря, важно знать, как зависит характер генерируемых подводными источниками поверхностных волн от стратификации потока и его глубины.

Генерации поверхностных волн от обтекаемых подводных препятствий в однородных и стратифицированных средах посвящены многочисленные исследования, как в лабораторных опытах, так и в рамках теоретических работ. В этой ситуации может показаться, что полнота исследования данной

гидродинамической проблемы практически достигнута. Однако результаты теоретических решений задач о генерации поверхностных возмущений представлены в основном в самой общей интегральной форме, и их трудно проанализировать из-за сложных подынтегральных выражений. В этом случае общие интегральные решения дополнительно требуют разработки специальных методов их анализа и получения достаточно простых аналитических выражений, допускающих проведение на их основе численных расчетов параметров поверхностного волнения.

Проведенный анализ работ по рассматриваемой теме показал, что в природных средах и, прежде всего, в водах Мирового океана, есть еще не полностью изученные гидродинамические явления. Это относится к области влияния плотностных неоднородностей морской среды, особенностей рельефа дна и глубины моря на параметры поверхностных возмущений, возникающих при обтекании глубинных препятствий. Следует учесть, что в реальных условиях моря в структуре стратификации морской среды характерны проявления относительно резких перепадов плотности воды, связанные с наличием сезонного термоклина или иных, часто возникающих скачков плотности. Поэтому представляет интерес исследование влияния плотностных неоднородностей воды на параметры поверхностных возмущений, особенно при обтекании препятствий вблизи скачков плотности. И здесь практически важно рассмотреть задачу о различии параметров поверхностных возмущений в

зависимости от местоположения препятствия относительно скачка плотности: над скачком или под ним.

На состояние свободной поверхности океана влияют как находящиеся в толще воды неоднородности (обтекаемые препятствия, изменения рельефа дна, полей плотности и течений), так и различные источники возмущений. Для правильной интерпретации данных, полученных при дистанционном зондировании морской поверхности, нужно знать причины, вызывающие те или иные поверхностные явления. В настоящее время актуальной остается задача исследования процессов поверхностных колебаний в неоднородной по плотности и нестационарной морской среде и согласования результатов моделирования с видимыми поверхностными волнениями. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой поверхностных возмущений неоднородных и нестационарных природных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей. Эти модели, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы.

Однако, в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. Эти модели и методы в дальнейшем входят, в тот набор «блоков», из которых складывается общая картина волновой динамики. В этой связи необходимо

отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованными источниками в тяжелой однородной жидкости. Построенные модельные решения позволяют в дальнейшем, с использованием средств компьютерной математики, получить асимптотические представления волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред.

Дистанционные методы играют все более значительную роль при изучении волновой динамики океана и атмосферы. Основным средством изучения неоднородностей, например, в толще океана должны служить низкочастотные звуковые волны, на использовании которых основана, в частности, акустическая томография. Однако существует ряд задач, которые вряд ли целесообразно решать с помощью акустических средств. Во-первых, акустические неоднородности в океане обычно весьма слабы, и необходимость их регистрации предъявляет жесткие требования к соответствующим системам излучения, приема и обработки. Во-вторых, изучение приповерхностных слоев океана акустическими методами обычно возможно лишь на небольших дистанциях, в основном с помощью зондирования направленным ультразвуком. Здесь может применяться диагностика сверху радиолокационными и оптическими средствами, в частности, даже простое фотографирование с корабля, самолета, искусственного спутника – дает массу информации о морской поверхности (рис. 1). Однако такая диагностика наиболее эффективны

именно для изучения поверхности – поверхностных волн, температурных свойств тонкого приповерхностного слоя, сильных внутренних волн, синоптических вихрей, оказывающих достаточно выраженное влияние на спектр поверхностных волн. Однако даже в этом случае получить достоверные количественные данные здесь не так просто.

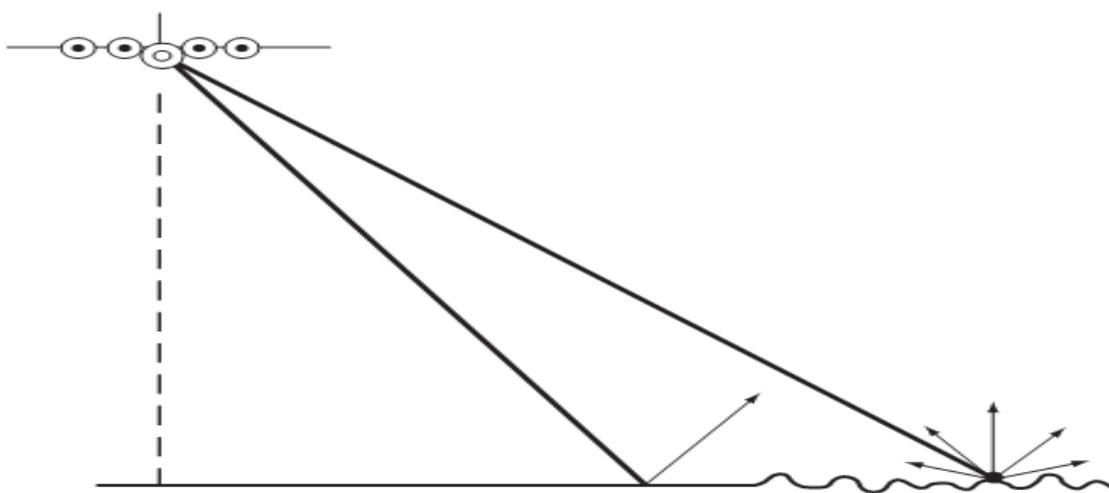


Рис. 1. Схема дистанционного зондирования океанической поверхности

Поэтому необходимо рассматривать и другие возможности изучения океанических неоднородностей и движений. Эти возможности связаны с искусственным возбуждением в морских условиях поверхностных и внутренних волн с целью изучения либо их самих, либо, с их помощью, других гидрофизических характеристик океана, например, параметров течений. Использование внутренних и поверхностных гравитационных волн для целей локации выглядит непривычно и вызывает некоторые очевидные возражения: скорость их распространения мала, и возбуждать их, на первый взгляд, трудно. Однако, во-первых, время изменчивости изучаемых процессов часто очень

велико, а, во-вторых, требуемая мощность возбуждаемых волн оказывается не такой уж большой. С другой стороны, использование «медленных» волн имеет и явные преимущества. Так, при использовании поверхностных волн при изучении океанических течений сразу выявляются, по крайней мере, три достоинства. В отличие от акустических волн, на скорость поверхностных волн не оказывают заметного влияния изменения температуры морской среды, играющие основную роль в акустической томографии. Кроме того, чувствительность метода очень велика. Так, типичные скорости главных течений и синоптических вихрей  $u_s$  имеют порядок 0.1 - 1 м/с. Очевидно, что относительные изменения времен задержек (волновых чисел зондирующих волн) имеют порядок  $u_s / u_\phi$ , где  $u_\phi$  – фазовая скорость волны. Для звука эта величина порядка  $10^{-3} - 10^{-4}$ , тогда как для поверхностных волн с периодом в несколько секунд она составляет единицы и десятки процентов. Также локальные скорости течений определяются локальными свойствами зондирующих поверхностных волн, и ее измерения не требуют решения сложных томографических задач. Внутренние гравитационные волны еще более чувствительны к изменениям условий их распространения.

Основные уравнения, описывающие поверхностные волновые возмущения стратифицированных сред. Задачи о поверхностных волнах - классические задачи гидродинамики и их исследованию в различных постановках посвящено большое число работ. С физико-химической точки зрения реальные стратифицированные среды (океан, атмосфера) представляет собой сложный

объект, однако далее нас будут интересовать только механические свойства идеальной жидкости. Как это принято в математической гидродинамике, для решения основных волновых задач используется несколько упрощающих предположений. В настоящей главе исходными уравнениями для анализа волновых движений сред является система уравнений гидродинамики, описывающая идеальную, невязкую, несжимаемую среду

$$\rho \frac{dU_1}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = F_1 \quad \rho \frac{dU_2}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} = F_2 \quad \rho \frac{dU_3}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = F_3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Здесь  $(U_1, U_2, U_3)$  - вектор скорости,  $(F_1, F_2, F_3)$  - вектор внешних сил (одной из которых может быть сила тяжести), ось  $z$  направлена вверх,  $p$  -

давление,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} + U_2 \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z}$ . Эта система уравнений Эйлера

должна быть дополнена граничными и начальными условиями. Обычно предполагается, что объем жидкости остается неизменным во времени, и ограничен областью, через которую жидкость не протекает. Условие непротекания означает, что нормальная компонента вектора скорости на границе области равна нулю. Граничные условия на свободной поверхности существенно отличаются от условия непротекания. Очевидно, что в случае

вязкой жидкости необходимо рассматривать другие граничные условия. При рассмотрении задач гидродинамики, возникающих в океанологии, области, занимаемые жидкостью, имеют огромные размеры, поэтому, например, при численном моделировании удобно использовать периодические граничные условия.

Несмотря на то, что в систему (1) - (2) не входит производная по времени от давления, уравнения Эйлера являются эволюционной системой с выделенной переменной  $t$ , означающей время. При изучении динамики эволюционных систем необходимо задавать начальные условия. Но так как давление может быть определено по полю скоростей при любом фиксированном значении  $t$ , то начальные условия должны удовлетворять соответствующим условиям согласования.

Система уравнений Эйлера представляет собой сложную математическую задачу, как в плане доказательств теорем существования и единственности, так и с аналитической и вычислительных точек зрения. Для двумерного случая существуют результаты о разрешимости уравнений Эйлера. В трехмерном случае результаты о глобальной (по времени) разрешимости уравнений Эйлера отсутствуют.

Двумерный случай существенно отличается от трехмерного случая.

Предположим, что  $U_3 \equiv 0$ ,  $F_3 \equiv 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z} \equiv 0$ . Тогда имеем систему уравнений

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = F_1$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = F_2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} = 0$$

Введем вихрь

$$\zeta = \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y} = 0$$

Теперь учитывая, что  $\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}$ , из системы (3) можно исключить давление.

Для этого первое уравнение из системы (3) дифференцируем по переменной  $y$ , а второе – по  $x$ , и вычтем первое уравнение из второго

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \frac{\partial U_2}{\partial y} + U_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Учитывая уравнение несжимаемости, можно получить

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + U_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad (4)$$

Для решения уравнения (4) необходимо уметь восстанавливать вектор скорости  $(U_1, U_2)$  по вихрю  $\zeta$ . С этой целью вводится функция тока:  $U_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $U_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ , которая удовлетворяет уравнению:  $\Delta \psi = -\zeta$ . С этим уравнением нужно связать соответствующие граничные условия (например, периодические), после чего задачу можно решать как численно, так и аналитически.

Рассмотрим далее двумерное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью и бесконечно глубоким дном. Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости  $(x, y)$ , ограниченную свободной поверхностью:  $-\infty < y < \eta(x, t)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ . Если считать, что движение жидкости потенциально, то существует такая функция  $\Phi(x, y, t)$ , что поле скоростей  $(U_1, U_2)$  имеет вид:  $U_1(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(x, y, t)}{\partial x}$ ,  $U_2(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(x, y, t)}{\partial y}$ . Из условия несжимаемости следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа:  $\Delta \Phi(x, y, t) = 0$ .

Рассмотрим движение жидкости в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения  $g$ . Уравнение Лапласа для определения функции  $\Phi(x, y, t)$  является простейшим линейным уравнением в частных производных, однако

особая сложность в изучении поверхностных волн заключается в нелинейности граничных условий. Тем более, что неизвестной функцией является не только потенциал скоростей, но и профиль волны, который определяется функцией  $\eta(x,t)$ . На границе используются два граничных условия. Кинематическое граничное условие может быть записано в виде:  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$  при

$y = \eta(x,t)$ . Динамическое граничное условие, которое означает, что давление на свободной поверхности должно быть равно нулю, имеет вид:

$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gy = 0$  при  $y = \eta(x,t)$ . Это условие означает также, что

рассматриваются исключительно поверхностные гравитационные волны. На самом деле необходимо учитывать также, например, ветровое волнение. Однако математическое моделирование ветрового волнения не является предметом отдельных исследований, которые не рассматриваются в настоящей главе. На дне выполняется условие непротекания, то есть вертикальная компонента скорости равно нулю при  $y \rightarrow -\infty$ . По переменной  $x$ , можно использовать, например, периодические граничные условия. Поскольку рассматривается нестационарная задача, то необходимо задать также начальные условия для функций  $\Phi(x,y,t)$  и  $\eta(x,t)$ . После этого сформулированная задача представляет собой замкнутую систему уравнений, и в различных функциональных классах рассматривалась во многих работах. Полученная система уравнений является консервативной и сохраняет полную

механическую энергию, которая состоит из кинетической  $T$  и потенциальной энергий  $U$ .

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} |\nabla\Phi|^2 dy$$

$$U = \frac{g}{2} \int_0^{2\pi} \eta^2(x,t) dx$$

Рассмотрим далее основные дисперсионные соотношения, описывающие линейные поверхностные и линейные внутренние возмущения природных стратифицированных сред. Объединенное дисперсионное уравнение, описывающее распространение гармонической волны частоты  $\omega$  и волновым вектором  $k$  в слое стратифицированной среды толщины  $H$  с постоянным распределением частоты Брента-Вайсяля  $N$  имеет вид

$$\operatorname{tg}\left(kH\sqrt{N^2\omega^{-2}-1}\right) = \omega\sqrt{N^2-\omega^2} / gk \quad (5)$$

В безразмерных переменных  $k_* = kH$ ,  $\omega_* = \omega/N$  уравнение (5) имеет вид

$$\operatorname{tg}\left(k_*\sqrt{1-\omega_*^2}/\omega_*\right) = B\omega_*\sqrt{1-\omega_*^2}/k_* \quad (6)$$

где  $B = N^2H/g$  - число Буссинеска. Далее будем предполагать, что  $B \ll 1$  - приближение Буссинеска, которое, как уже отмечалось, широко используется

при исследовании динамики внутренних волн в океане. Отметим, что число Буссинеска характеризует (с точностью до множителя  $\pi^2$ ) отношение квадрата максимальной групповой скорости старшей моды ( $n=1$ ) внутренних гравитационных волн  $NH/\pi$  к квадрату максимальной групповой скорости длинных поверхностных волн  $\sqrt{gH}$ .

Рассмотрим ниже несколько случаев, которые встречаются при решении задач волновой динамики природных стратифицированных сред. Значения безразмерной частоты  $\omega_* < 1$ . Тогда уравнение (6) дает два типа дисперсионных соотношений. Первый тип описывает длинные поверхностные волны:  $\omega_*^2 = k_*^2 / B$  - в безразмерных переменных,  $\omega^2 = gHk^2$  - в размерных переменных. Второй тип описывает внутренние гравитационные волны:  $\omega_*^2 = k_*^2 / (k_*^2 + \pi^2 n^2)$  - в безразмерных переменных,  $\omega^2 = k^2 N^2 / (k^2 + \pi^2 n^2 H^{-2})$  - в размерных переменных. Значения  $\omega_* > 1$ . Тогда уравнение (6) запишется в виде

$$\text{th}\left(k_* \sqrt{\omega_*^2 - 1} / \omega_*\right) = B \omega_* \sqrt{\omega_*^2 - 1} / k_* \quad (7)$$

Значения безразмерной частоты находятся в пределах  $1 < \omega_* \ll 1/\sqrt{B}$ . Тогда можно показать, что при этом  $k \ll 1$ , и уравнение (7) переходит в соотношение  $\omega_*^2 = k_*^2 / B$  (безразмерные переменные) или в  $\omega^2 = gHk^2$  (размерные переменные). Значения безразмерной частоты  $\omega_* \gg 1/\sqrt{B}$ . Тогда можно

показать, что при этом  $k \gg 1$ , и уравнение (7) переходит в соотношение  $\omega_*^2 = k_* / B$  (безразмерные переменные) или в  $\omega^2 = gk$  (размерные переменные). Значения безразмерной частоты  $\omega_* \approx 1/\sqrt{B}$ . Тогда уравнение (7) переходит в соотношение  $\text{th } k_* = B\omega_*^2 / k_*$  (безразмерные переменные) или в  $\omega^2 = gk \text{ th}(kH)$  (размерные переменные).

Таким образом, в приближении Буссинеска внутренние и поверхностные волны полностью разделены, и их можно рассматривать независимо друг от друга. В частности, замена условий на свободной поверхности стратифицированной среды (океана) на приближение «твердой крышки» не меняет основные дисперсионные соотношения, описывающие динамику внутренних гравитационных волн этой среды.

#### Основные методы и подходы к процедурам дистанционных измерений

волновых возмущений стратифицированных сред. Сущность измерения приповерхностных течений посредством возбуждения поверхностных волн заключается в следующем. Пусть в некоторой точке морской акватории установлены два источника поверхностных волн (волнопродукторы), возбуждающие гармонические во времени поверхностные волны. Эти волны попадают в исследуемый участок акватории, в котором существуют приповерхностные течения с горизонтальной скоростью  $\mathbf{U}(x, y)$ , где  $x, y$  – горизонтальные координаты. Предполагается, что длина возбуждаемых поверхностных волн  $\lambda$  мала по сравнению с масштабом течения в

горизонтальной плоскости и течение в вертикальной плоскости можно считать однородным до глубины порядка  $\lambda/2\pi$ . Впрочем, последнее предположение менее существенно, поскольку действие неоднородного по глубине течения эквивалентно действию однородного течения с эффективной скоростью

$$2k \int_0^{\infty} U(z) \exp(-2kz) dz, \quad k - \text{волновое число, } z - \text{глубина.}$$

Поэтому для целей обнаружения можно рассматривать сравнительно короткую поверхностную волну на плавно неоднородном горизонтальном течении. Для такой волны локально справедливо обычное дисперсионное соотношение с учетом влияния потока:  $\omega - \mathbf{k}\mathbf{U}(x, y) = \sqrt{gk}$ . Если частота волны  $\omega$  известна (она совпадает с частотой колебаний волно-продуктора, если только течение не испытывает каких-либо быстрых и сильных изменений во время измерений), то измеряя волновой вектор  $\mathbf{k}$ , определяем проекцию  $U_k$  на направление вектора  $\mathbf{k}$   $U_k = (\omega - \sqrt{gk})/k$ . Если в месте измерения существуют две волны с разными  $\mathbf{k}$ , то таким образом определяются две проекции вектора скорости  $\mathbf{U}(x, y)$ , и этот вектор будет известен полностью. Выбирая оси координат  $x, y$ , зная углы волновых векторов  $\beta$  относительно этих осей и проекции  $U_{ki}$  скорости на направления  $\mathbf{k}_i$ , с помощью геометрических соображений получим модуль вектора  $U(x, y)$  и угол между ним и осью  $z$

$$U(x, y) = U_{ki} / (\cos\varphi \cos\beta_i - \sin\varphi \sin\beta_i)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = (U_{k2} \cos \beta_i - U_{k1} \cos \beta_2) / (U_{k1} \sin \beta_2 - U_{k1} \sin \beta_1)$$

где  $i=1,2$  соответствуют двум возбуждаемым волнам.

Таким образом, задача сводится к измерению волнового вектора волны в той же акватории, точнее в области, большей по сравнению с длиной волны, но малой по сравнению с масштабом изменения  $\mathbf{U}(x, y)$ , где нужно определить течения. Поэтому достаточно иметь локальную информацию о волнах, а снимок или радиолокационное изображение большой акватории, сделанный с самолета или искусственного спутника, позволяет измерить течение во всех точках этой акватории .

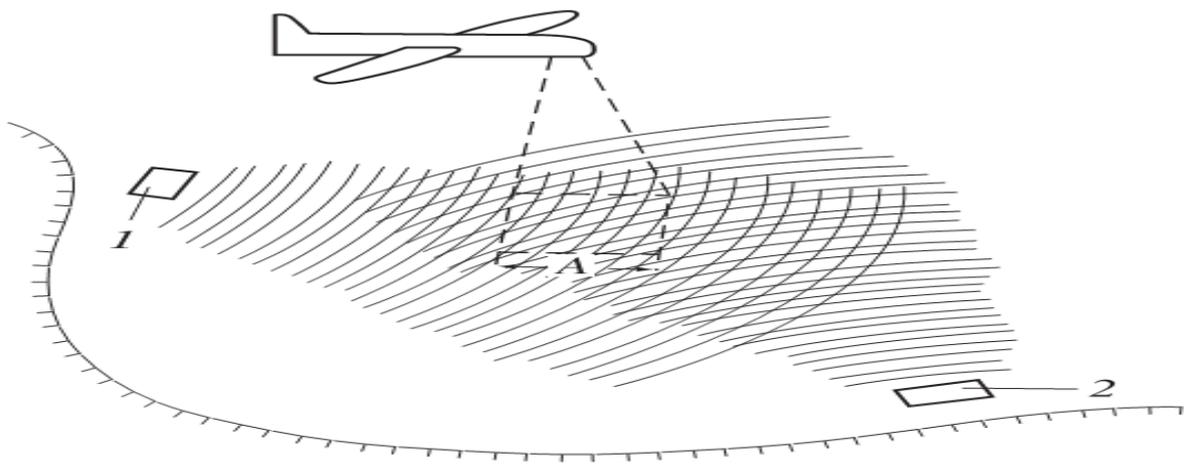


Рис. 2. Схема метода изучения приповерхностных течений (выхода внутренних волн на поверхность) с помощью искусственно возбуждаемых поверхностных волн: 1,2 – волнопродукторы, А – размер «окна наблюдения»

В настоящее время общепризнанно, что внутренние волны являются одним из важнейших факторов, определяющих уровень турбулентности и тонкой структуры океана, и влияют на состояние морской поверхности, регистрируемое с помощью средств космической океанографии. В то же время, степень изученности процессов взаимодействия внутренних волн с другими гидрофизическими полями все еще очень мала, несмотря на растущий интерес к этим исследованиям. Основная причина заключается в трудности эксперимента, связанного с тщательным количественным измерением различных волновых возмущений и установлением корреляций между ними. Дело осложняется тем, что условия эксперимента обычно зависят от ряда неконтролируемых факторов, в том числе от параметров внутренних волн, проходящих в точку наблюдений. В настоящее время известны единичные эксперименты по прямому наблюдению взаимодействия внутренних волн с турбулентностью и поверхностными волнами в натуральных условиях. Но даже в этих случаях трудно обеспечить повторяемость результатов из-за изменчивости полей внутренних волн в реальных океанических условиях.

Поэтому перспективным представляется искусственное возбуждение внутренних волн в морских условиях с помощью, например, специальных волнопродукторов – генераторов, источников волновых возмущений. Это может позволить получить калиброванные волны с достаточно хорошо контролируруемыми и стабильными параметрами. В свою очередь стабильность

такого «сигнала» создает возможность его возбуждения и обнаружения даже на фоне сильной помехи с помощью стандартных методов обработки, обычных для радиофизики и акустики. Существуют некоторые методы обработки натуральных океанологических данных, позволяющие выделить «сигнал» (пакеты распространяющихся внутренних волн) на фоне больших помех. Очевидно, вряд ли целесообразно пытаться «засветить» искусственными внутренними волнами всю толщу океана – целесообразно использовать верхний (сезонный) термоклин, как некоторое канализирующее устройство. Следовательно, речь может идти о достаточно высокочастотных внутренних волнах, которые могут быть локализованы в сезонном термоклине, где уровень фона изучен относительно слабо. Поэтому, вначале необходимо рассматривать волнопродуктор, который установлен в области морского шельфа, где «внутренняя погода» (шумы, не связанные с внутренними волнами) обычно спокойнее. Этот волнопродуктор должен «засвечивать» сравнительно небольшую акваторию, порядка 1-10 км, в которой внутренняя волна может надежно выделяться на фоне помех. Еще лучше, если на небольших расстояниях (порядка сотен метров) волна могла бы оказывать заметное воздействие на уровень турбулентности в районе термоклина. Это создало бы возможность контролировать не только распространение внутренних волн, но и их вторичные проявления.

Чтобы получить предварительно качественное представление о возможности выполнения этих условий предположим, что источник волн

(волнопродуктор) находится под или над максимумом термоклина, который моделируется скачком плотности. В качестве источника волновых возмущений можно рассмотреть следующие модели: горизонтально лежащий цилиндр, совершающий вертикальные колебания и вертикально расположенная пластина, колеблющаяся около горизонтальной оси. Действие этих источников волновых возмущений может быть приближенно представлено системой источников и стоков. Так, цилиндр, в первом приближении представим системой диполей, а тонкая пластина системой монополей, и тогда для расчета генерируемых этими источниками дальних полей внутренних волн можно использовать основные результаты линейной теории .

Теоретические предпосылки дистанционного зондирования основных волновых возмущений стратифицированных сред. При дистанционном зондировании можно получить сведения об изменениях спектра морской поверхности по результатам обратного (резонансного) рассеяния радиоволн . Эти изменения (контрасты), как правило, вызваны поверхностными течениями, связанными в том числе, с выходом внутренних гравитационных волн на поверхность океана.

Упрощенно модель изменения морского спектра под влиянием поверхностных течений можно описать следующим образом. Обозначим через  $\Omega(t, \mathbf{r}, \mathbf{k})$  энергетический спектр морской поверхности,  $\mathbf{r} = (x, y)$  - координаты на этой поверхности,  $\mathbf{k}$  - волновой вектор,  $t$  - время. Согласно известной модели взаимодействия поверхностного течения, которое определяется полем

скоростей  $\mathbf{U}(x, y, t)$ , водится величина  $A(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \Omega(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}) / \sigma$ , где  $\sigma = \sqrt{gk}$  - дисперсионное соотношение, например, для длинных поверхностных волн,  $k$  - модель волнового вектора. Эта величина называется плотностью волнового действия. Тогда вдоль траектории системы

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \quad \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\omega(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \sigma(k) + (\mathbf{k}, \mathbf{U}(\mathbf{r}, t))$$

где выполняется равенство  $\frac{dA}{dt} = 0$ . Введем групповую скорость  $\tilde{\mathbf{N}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{k}}$ , и тогда

это условие имеет вид:  $\frac{\partial A}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}}\right) + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}, \frac{\partial A}{\partial \mathbf{k}}\right) = 0 \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{C}(k) + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ ,

$\frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{k}, \mathbf{U}(\mathbf{r}, t))$ . Данное выражение можно рассматривать, как уравнение

для определения величины  $A$ . В реальных океанических условиях спектр поверхностного волнения может быть представлен в виде, не зависящем от времени. Тогда уравнение имеет явные решения, которые позволяют по данным обратного рассеяния радиоволн получать определенную информацию о зонах поверхности моря, занятого течениями и иными поверхностными проявлениями внутренних волн.

Несмотря на то, что еще никому не удалось измерить полный спектр внутренних гравитационных волн в океане, имеющиеся оценки различных сечений и проекций спектра позволяют получить представление об основных чертах этого спектра. Используя известные факты и теоретические

представления, а также сделав ряд смелых, была сделана попытка увязать данные по одномерным спектрам температуры и полей течений в различных районах Мирового океана в рамках известной единой модели спектра внутренних гравитационных волн Гарретта и Манка. Эта модель базируется на следующих основных предположениях:

1) наблюдаемые колебания гидрофизических характеристик волновых полей и течений в пространстве и во времени определяются исключительно внутренними гравитационными волнами;

2) наблюдаемые волновые поля образуются суперпозицией свободных линейных волн со случайными фазами и может быть описана в рамках ВКБ приближения метода геометрической оптики (рис. 3-5);

3) энергия волн распределена непрерывно в пространстве частот и волновых чисел, а не сосредоточена вдоль отдельных поверхностей, соответствующим отдельным волновым модам – модальный континуум вместо дискретных мод;

4) волновое поле обладает вертикальной симметрией, то есть потоки энергии вверх и вниз одинаковы;

5) волновое поле горизонтально изотропно;

6) данные измерений волновых полей, собранные в различных местах и в разное время описывают приблизительно одно и то же универсальное волновое поле

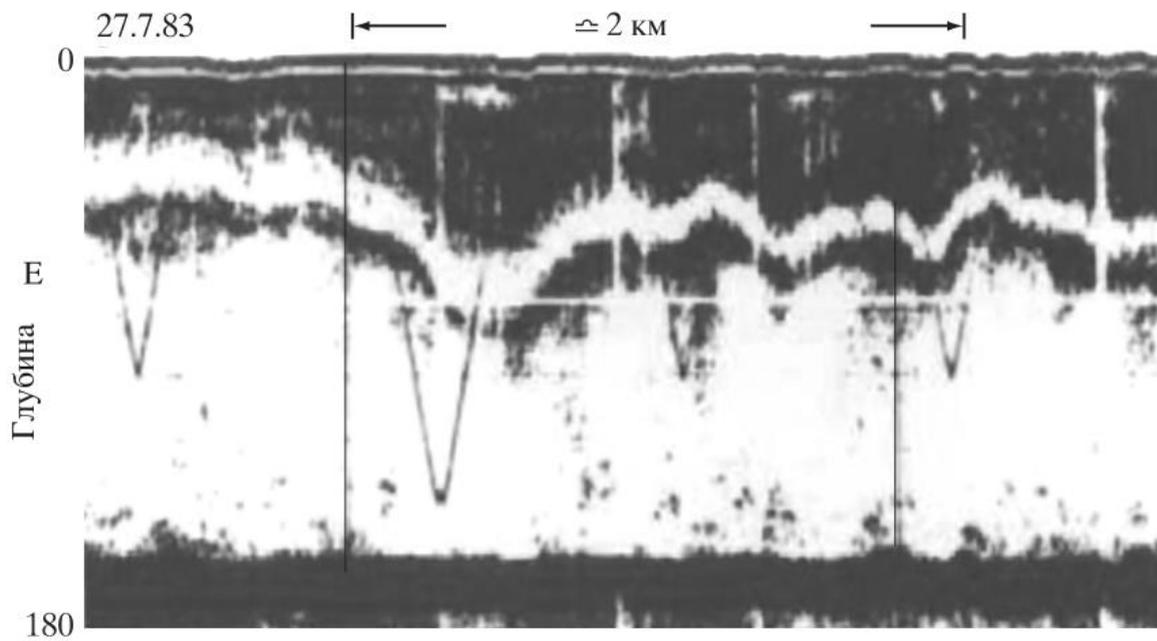


Рис. 3. Внутренняя гравитационная волна,двигающаяся влево в Кельтском море (1983 г.), хорошо описываемая линейной теорией (волна Эйри)

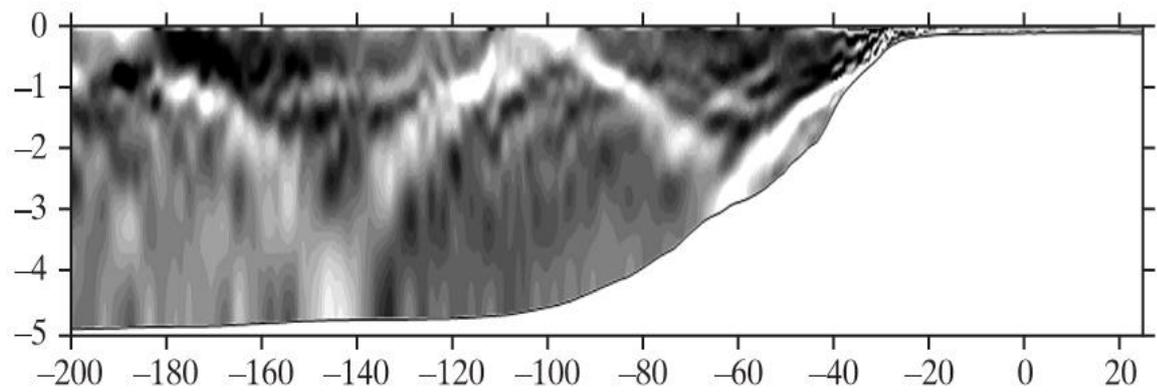


Рис. 4. Внутренние приливные гравитационные волны на шельфе Бискайского залива – наблюдаемая ярко выраженная лучевая модовая структура волновых пакетов (ВКБ приближение)

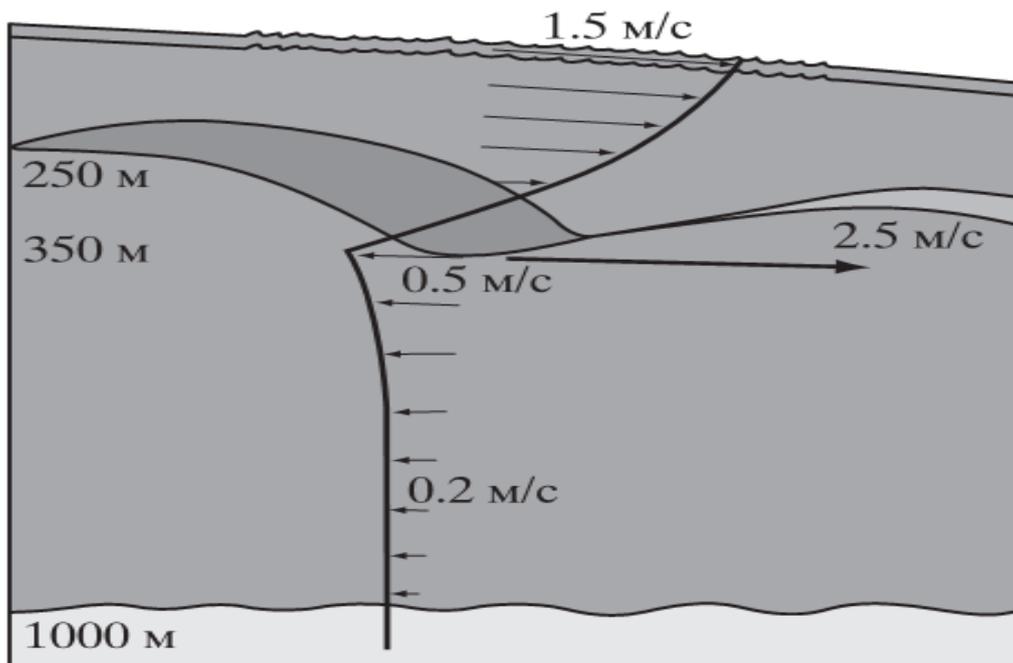


Рис. 5. Внутренние гравитационные волны в море Сулу:

шкалированный срез скоростей

Все эти предположения позволили создать простую модель полного спектра внутренних волн в океане, но некоторые из них нельзя принять безоговорочно. Первое предположение кажется наиболее оправданным для временных записей изменчивости гидрофизических полей в океане, поскольку диапазон свободных внутренних волн имеет четкие границы – частоту плавучести Брента-Вяйсяля и инерционную частоту. В этих границах, как показывают данные большинства океанологических измерений, колебания, связанные с внутренними волнами, действительно доминируют. Сложнее

обстоит дело с изменчивостью гидрофизических полей вдоль горизонтальных и особенно вертикальных направлений.

Внутренние волны имеют четкое ограничение пространственных масштабов лишь сверху, со стороны длинных волн. Максимальная длина волны полностью определяется дисперсионной зависимостью низшей волновой моды. Как показывают многочисленные данные натурных океанических и атмосферных наблюдений, внутренние гравитационные волны не всегда могут доминировать над пространственными колебаниями иного происхождения, например фронтами и синоптическими вихрями в горизонтальном направлении (рис. 6-8) .



Рис. 6. Внутренние гравитационные волны в проливе Карских ворот Баренцева моря (съемки со спутника «Алмаз», 1991 г.)

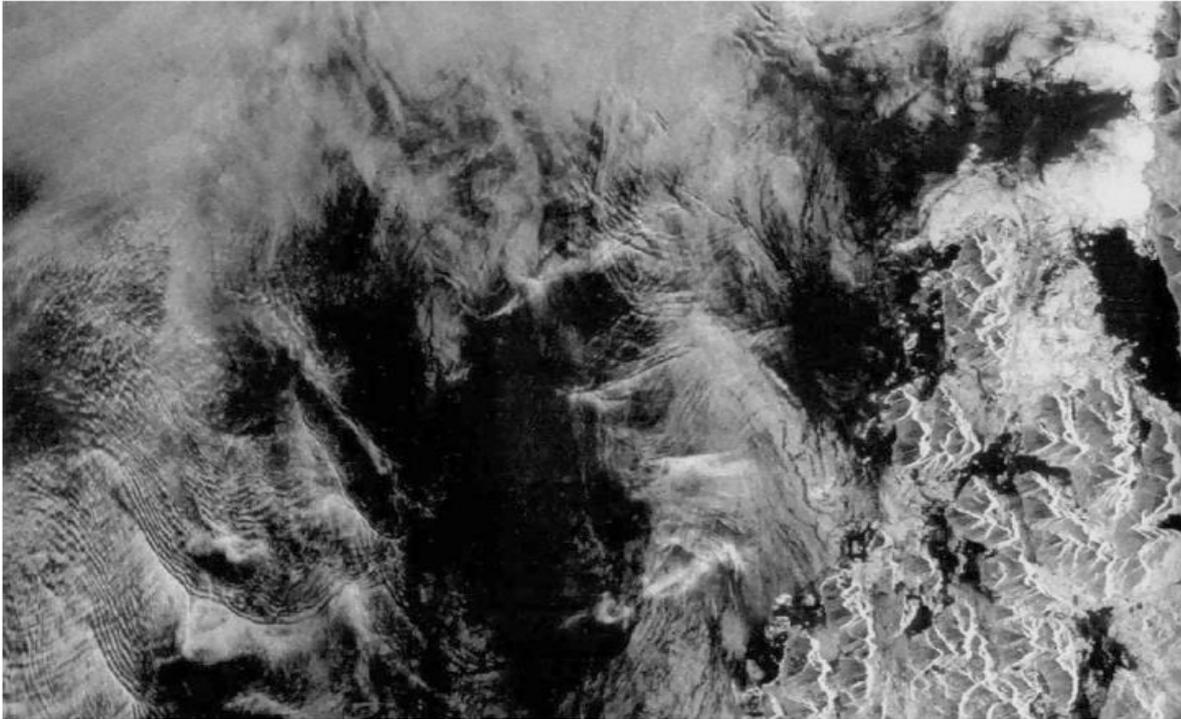


Рис. 7. Волновой пакет вдоль края континентального шельфа у архипелага Вестеролен в Норвежском море. В каждой группе 10-15 волн (фото спутника ERS-2 16 августа 2000г.)

Предположение о линейности волн и допустимости ВКБ приближений позволяет установить связи между различными компонентами волновых движений на различных горизонтах и между пространственными и временными частотами волн. Имеющиеся наблюдения за параметрами внутренних волн не обнаруживают существенных отклонений от дисперсионных соотношений, вытекающих из линейной теории (рис. 3-5).

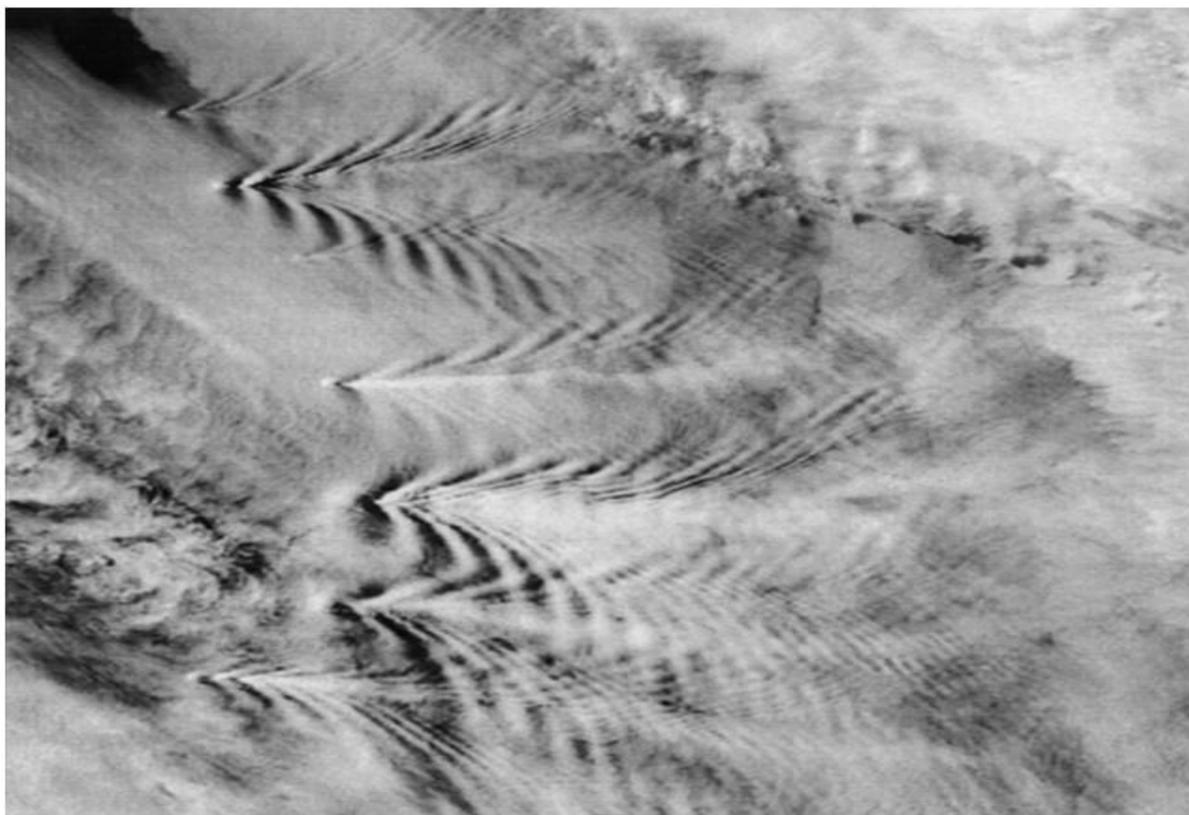


Рис. 8. Атмосферные внутренние гравитационные волны за Южными Сандвичевыми островами в Южной Атлантике ( $58^{\circ}$  ю.ш.,  $36^{\circ}$  з.д.) на снимке спутника Aqua (02.11.2004, 20h15m UTC). Площадь наибольшего острова 110 кв. км, максимальная высота над уровнем моря 1372 м

Что касается ВКБ приближений (приближений геометрической оптики), то они оправданы далеко не всегда, в частности они неприменимы при резких изменениях частоты плавучести Брента-Вяйсяля, рельефа дна, вблизи точек поворота лучей. Предположение о модальном континууме представляется даже более реалистичным, чем картина дискретных волновых мод, так как реальный океан слишком изменчивая среда, для того чтобы отдельные моды могли сформироваться у колебаний всех масштабов. Достаточно сказать, что скорость

переменных течений сопоставима со скоростью внутренних волн, и размытие дискретного спектра может быть значительным.

На рис. 9-10 представлены результаты натурных измерений амплитудной и фазовых структур приливных внутренних гравитационных волн на шельфе Бискайского залива . Полученные натурные данные показывают, что, действительно, полученные волновые картины с ярко выраженной лучевой структурой могут (ВКБ приближение) вполне могут наблюдаться в условиях реального океана, особенно при исследовании эволюции пакетов внутренних гравитационных волн. В частности аналитические, численные и натурные данные показывают, что ширина волновых пучков уменьшается при приближении к берегу.

Формально, в линейной постановке, ширина отраженного пучка в ВКБ приближении внутренних волн может стать сколь угодно малой при соответствующих соотношениях параметров среды (стратификация, угол наклона дна). То есть происходит существенная локальная интенсификация волн вблизи берега. Однако, очевидно, что в реальных природных стратифицированных средах (океан, атмосфера), энергия волнового поля остается в таких пространственных областях конечной – включаются нелинейные механизмы диссипации и турбулентного перемешивания .

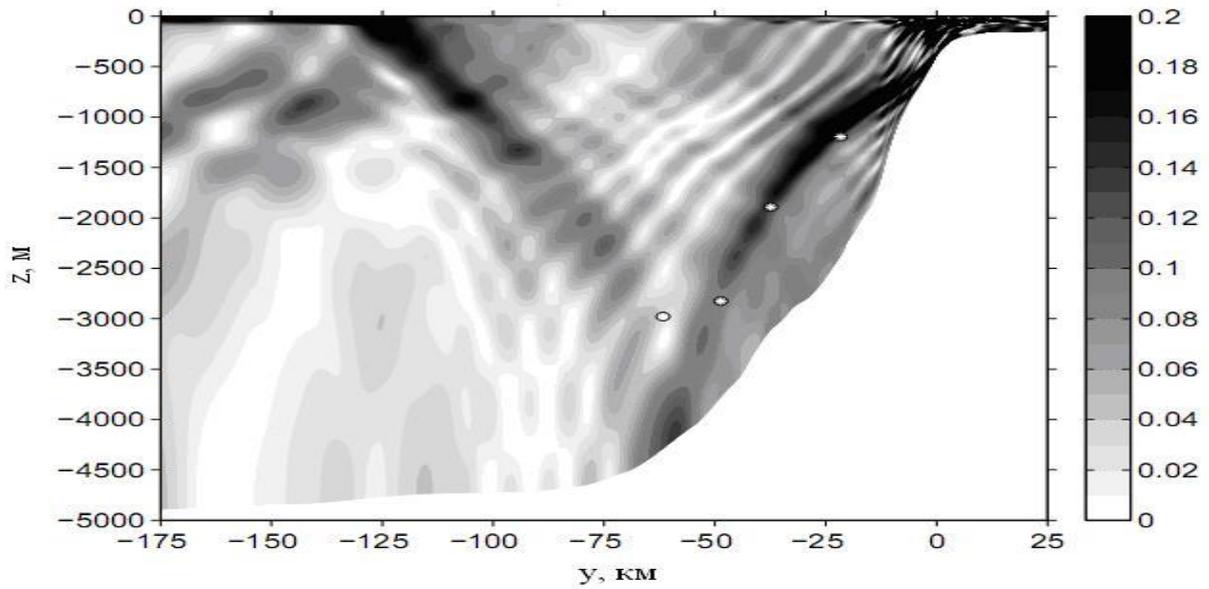


Рис. 9. Внутренние приливные волны на шельфе Бискайского залива:  
 амплитуда вектора скорости (м/сек). Модовая и лучевая структура  
 наблюдаемых волновых возмущений

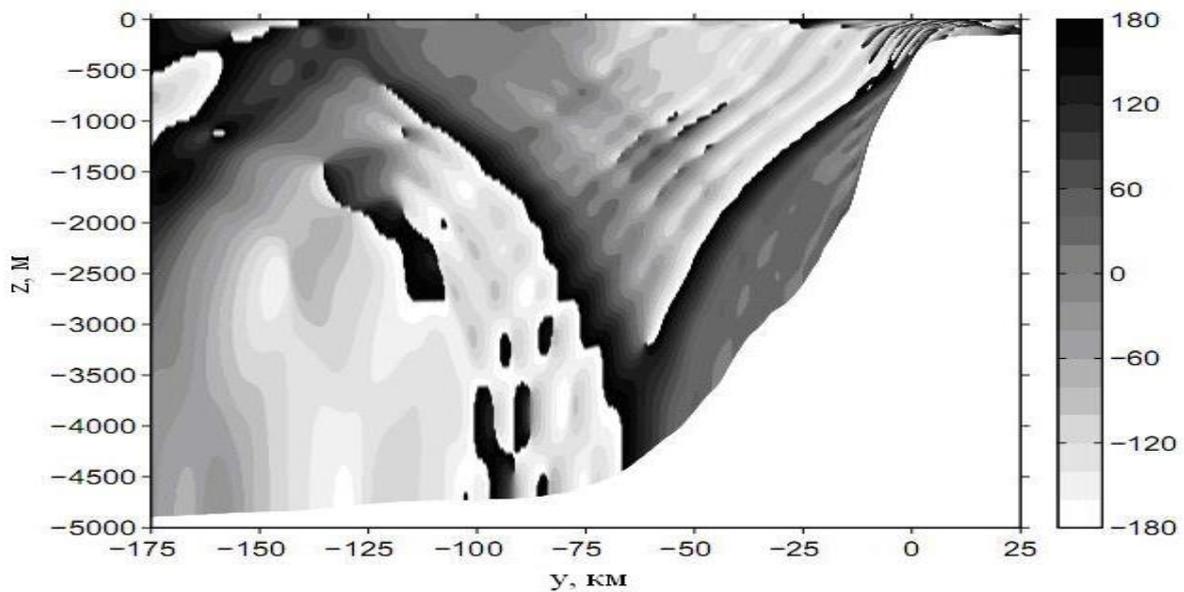


Рис. 10. Внутренние приливные волны на шельфе Бискайского залива:  
 фаза вектора скорости (градусы). Модовая и лучевая структура наблюдаемых  
 волновых возмущений

Также может быть оправданным в значительной мере и допущение о вертикальной симметрии поля, тогда как горизонтальная изотропность внутренних волн – свойство, далеко не обязательное. Но поскольку это допущение сильно упрощает модель (горизонтальная изотропия может быть присуща волновым полям вдали от источников возмущений), его можно использовать. Самым оторванным от реальности представляется предположение об универсальности измеряемых в различных районах Мирового океана гидрофизических полей, так как оно полностью пренебрегает изменчивостью и разнообразием гидрологических параметров океана. Однако, несмотря на идеализирующие предположения, модель Гарретта-Манка неплохо описывает волновые колебания в океане. Эта модель выдержала проверки предпринятые многочисленными исследователями в разных районах Мирового океана.

Результаты теоретического изучения генерации и распространения внутренних гравитационных волн, могут быть использованы для описания, в том числе, волнового шлейфа в океане за движущимся тропическим циклоном (ураганом), подветренных волн в стратифицированной атмосфере при обтекании орографических препятствий (изолированных гор, островов в океане) и многочисленных других задач волновой динамики природных стратифицированных сред. В частности, в формировании волновых картин в атмосфере Земли участвуют инерционно-гравитационные волны,

обусловленные плотностной стратификацией этой природной среды. Представленная на рис.8 картина фазовых линий полей внутренних гравитационных волн в атмосфере качественно подобна известной волновой картине корабельных волн от движущегося источника возмущений. Здесь так же присутствуют боковые и поперечные волны, отвечающие различным ветвям фазовых кривых. Основное отличие, как известно, состоит в том, что для корабельных волн угол полураствора волнового клина  $\theta \approx 19.5^\circ$  не зависит от скорости перемещения источника волновых возмущений. В то же время для подветренных волн в стратифицированной вращающейся атмосфере Земли эта зависимость очень сильная. Интересно отметить, что картины подветренных волн обнаруживаются даже на спутниковых фотографиях атмосферы Марса. Таким образом, полученные аналитические представления фазовых поверхностей образуют волновую картину полей внутренних гравитационных волн от движущегося локализованного источника. Поэтому на основе этих представлений можно изучать структуры волнового шлейфа в океане за движущимся тропическим циклоном (ураганом), системы подветренных волн в атмосфере Земли и другие задачи эволюции волн в природных стратифицированных средах, имеющие, в том числе, прикладное значение.

**2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРИ  
ОБТЕКАНИИ ДВУХСЛОЙНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ  
БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**



Рассматривается задача о возбуждении поверхностных возмущений при поперечном обтекании препятствия в виде цилиндрического тела потоком идеальной жидкости, состоящей из двух слоёв постоянной плотности:  $\rho_1$  (верхний слой) и  $\rho_2$  (нижний), с условием  $\rho_1 < \rho_2$ . Толщина верхнего слоя —  $H$ , нижний слой — бесконечно глубокий. Поток стационарно обтекает препятствие, локализованное либо над границей раздела слоев, либо под ней.

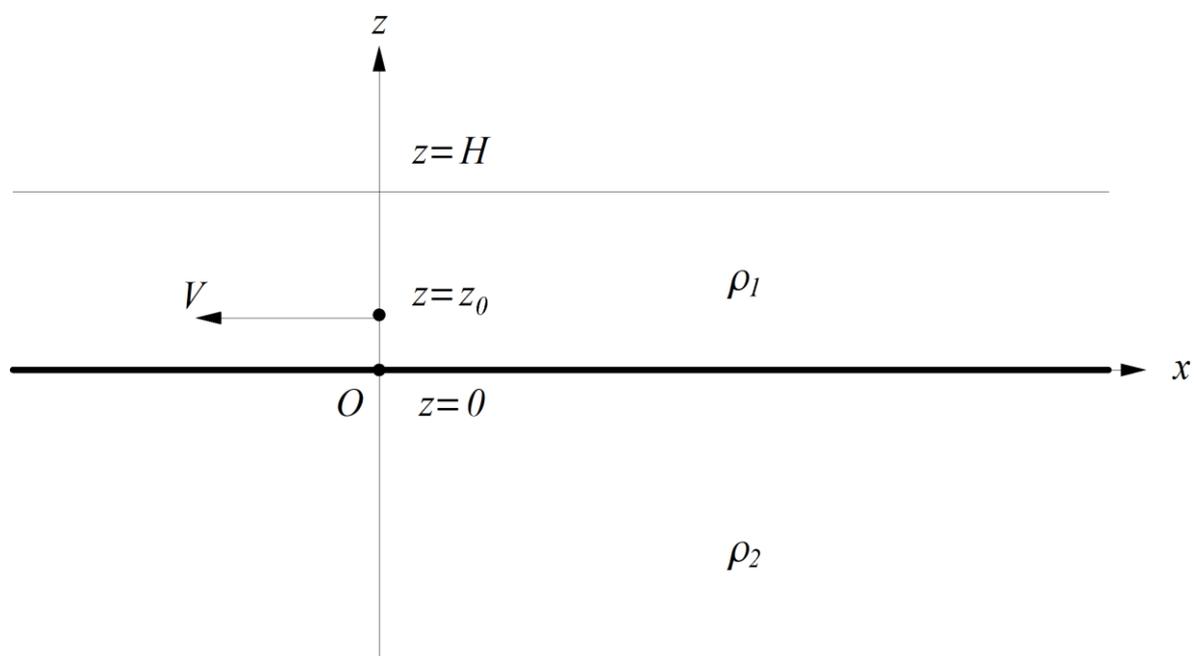


Рис. 1. Схема движения диполя в верхнем слое двухслойной жидкости в начальный момент времени

Цилиндрическое препятствие моделируется точечным диполем с моментом  $R$ , внезапно (в момент времени  $t = 0$ ) пришедшим в движение вблизи границы раздела слоев с постоянной скоростью  $V$ , направленной горизонтально (вдоль оси  $x$ , совпадающей с невозмущенным положением этой границы). Движущийся в направлении отрицательных  $x$  диполь поместим

вначале на горизонте  $z = z_0$  в верхнем слое (рис. 1), а затем на горизонте  $z = -z_0$  — в нижнем (рис. 3). Исследуется установившаяся картина поверхностных волн вдали от диполя, и в силу линейности в дальнейшем рассматривается диполь с единичным моментом.

Препятствие над слоем скачка. Рассмотрим задачу о возбуждении поверхностных возмущений движущимся над слоем скачка плотности препятствием, расположенным в начальный момент времени в точке  $(0, z_0)$ .

Введем потенциал скоростей  $\Phi(x, z, t)$ ,  $\nabla\Phi = \vec{U}$ ,  $\vec{U} = (u, v)$ , где  $u, v$  — соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости в произвольной точке потока. Тогда для потенциала  $\Phi$  имеем уравнение

Пуассона и соответствующие граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi(x, z, t) = \theta(t)\delta(z - z_0)\delta'(x + Vt), \Phi(x, z, t) \equiv 0 \text{ при } t < 0, \\ \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left( \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция,  $\delta'(\cdot)$  — ее производная,  $g$  — ускорение свободного падения;

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \Phi(x, z, t) = \begin{cases} \Phi_1(x, z, t), & z > 0, \\ \Phi_2(x, z, t), & z < 0. \end{cases}$$

Правая часть уравнения Пуассона соответствует движущемуся диполю, находящемуся в произвольный момент времени  $t$  ( $t > 0$ ) в точке  $(-Vt, z_0)$ . Первое

граничное условие описывает постоянство давления на свободной поверхности жидкости, второе условие означает равенство вертикальных скоростей по обе стороны границы раздела слоев, а третье условие — равенство давлений по разные стороны этой границы.

Для трансформанты Фурье

$$\tilde{\Phi}(k, \omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \Phi(x, z, t) dt$$

задача (1) преобразуется к виду ( $k$  — волновое число,  $\omega$  — частота)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\Phi} = \frac{k}{\omega - kV} \delta(z - z_0), \\ -\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left( -\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left( -\omega^2 \tilde{\Phi}_2 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\tilde{\Phi}(k, \omega, z) = \begin{cases} \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z), & 0 < z < H, \\ \tilde{\Phi}_2(k, \omega, z), & z < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z), & z_0 < z < H, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z), & 0 < z < z_0. \end{cases}$$

Решение  $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$  с точностью до множителя, зависящего только от  $k$  и  $\omega$ , удовлетворяющее первому граничному условию в (2), имеет вид

$$\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) = (\omega^2 + gk)e^{k(z-H)} - (\omega^2 - gk)e^{-k(z-H)}. \quad (3)$$

Решение  $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$  ищется в виде  $P(k, \omega)e^{kz} + Q(k, \omega)e^{-kz}$ . Для полноты решения последнее нужно “сшить” с решением  $\tilde{\Phi}_2(k, \omega, z) = C(k, \omega)e^{-|k|z}$  ( $z < 0$ ) с помощью граничных условий при  $z = 0$ . На этом пути получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) = & (\rho_2(\omega^2 - gk) + \rho_1(\omega^2 + gk))e^{kz} + \\ & + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - gk)e^{-kz}. \end{aligned} \quad (4)$$

Окончательно решение  $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$  ищем в виде

$$\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) = \begin{cases} A(k, \omega)\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z), & z_0 < z < H, \\ B(k, \omega)\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z), & 0 < z < z_0, \end{cases}$$

где  $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$  и  $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$  определены в (3) и (4). Для нахождения функций  $A(k, \omega)$  и  $B(k, \omega)$  воспользуемся условием “сшивки” решения при  $z = z_0$ , вытекающим из первого уравнения, фигурирующего в задаче (2):

$$\begin{cases} A(k, \omega)\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z_0) = B(k, \omega)\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z_0), \\ \left( A(k, \omega)\frac{\partial \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)}{\partial z} - B(k, \omega)\frac{\partial \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} = \frac{k}{\omega - kV}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим выражения для  $A(k, \omega)$  и  $B(k, \omega)$ :

$$\begin{cases} A(k, \omega) = \frac{\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z_0)}{W} \frac{k}{\omega - kV}, \\ B(k, \omega) = \frac{\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z_0)}{W} \frac{k}{\omega - kV}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W = & 4k(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(\omega^2 - gk)(\omega^2 - \omega_1^2(k)), \\ \omega_1^2(k) = & \frac{gk(\rho_2 - \rho_1) \operatorname{th} kH}{\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th} kH}. \end{aligned}$$

В конечном итоге получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\
&\times \frac{\left[ (\rho_2(\omega^2 - g|k|) + \rho_1(\omega^2 + g|k|))e^{|k|z_0} + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - g|k|)e^{-|k|z_0} \right]}{4|k|(\rho_2 \operatorname{ch}|k|H + \rho_1 \operatorname{sh}|k|H)} \times \\
&\times \frac{\left[ (\omega^2 + g|k|)e^{|k|(z-H)} - (\omega^2 - g|k|)e^{-|k|(z-H)} \right]}{(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} \\
\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\
&\times \frac{\left[ (\rho_2(\omega^2 - g|k|) + \rho_1(\omega^2 + g|k|))e^{|k|z} + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - g|k|)e^{-|k|z} \right]}{4|k|(\rho_2 \operatorname{ch}|k|H + \rho_1 \operatorname{sh}|k|H)} \times \\
&\times \frac{\left[ (\omega^2 + g|k|)e^{|k|(z_0-H)} - (\omega^2 - g|k|)e^{-|k|(z_0-H)} \right]}{(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь важно отметить, что в формулах (5) везде вместо  $k$  стоит  $|k|$ , кроме множителя  $k/(\omega - kV)$ . Это обусловлено тем, что в решении  $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$  содержится  $|k|$  для обеспечения убывания решения с глубиной при всех  $k$  (положительных и отрицательных).

В дальнейшем нас будет интересовать величина возвышения поверхности жидкости:

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} \Big|_{z=H}.$$

Трансформанта Фурье последней связана с  $\tilde{\Phi}(k, \omega, z)$  следующим образом:

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{i\omega}{g} \tilde{\Phi}(k, \omega, H).$$

Далее, используя выражения из (5), получим

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{ik}{\omega - kV} \times \frac{\omega \left[ (\rho_2(\omega^2 - g|k|) + \rho_1(\omega^2 + g|k|))e^{|k|z_0} + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - g|k|)e^{-|k|z_0} \right]}{2|k|(\rho_2 \operatorname{ch}|k|H + \rho_1 \operatorname{sh}|k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}.$$

Обратное преобразование Фурье от  $\tilde{\eta}(k, \omega)$  представляется в виде

$$\eta(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}(k, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (6)$$

Здесь контур интегрирования по  $\omega$  слегка смещен в верхнюю полуплоскость. Интеграл по  $\omega$  вычислим, замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость с учетом полюсов в точках  $\omega = kV$ ,  $\omega = \pm\sqrt{g|k|}$ ,  $\omega = \pm\omega_1(|k|)$ .

Установившемся режиму движения диполя в системе координат  $\xi = x + Vt$ , движущейся вместе с ним, соответствует предел выражения (6) при  $t \rightarrow +\infty$ . При этом вклады полюсов  $\omega = \pm\sqrt{g|k|}$  и  $\omega = \pm\omega_1(|k|)$  при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся к нулю. Например, при учете полюса  $\omega = \sqrt{gk}$  и деформации исходного контура интегрирования по  $k$  в путь наискорейшего спуска, проходящего через точку стационарности фазы, соответствующие полюса не пересекаются (и не дают вкладов в интеграл), а вклад стационарной точки при  $t \rightarrow +\infty$  ведет себя как  $O(1/\sqrt{t})$ . Вклад полюса  $\omega = kV$  дает

$$\eta(\xi) = \frac{1}{4\pi V} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\rho_2(|k|V^2 - g) + \rho_1(|k|V^2 + g))e^{|k|z_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch}|k|H + \rho_1 \operatorname{sh}|k|H)(|k|V^2 - g)(1 - \psi(|k|))} + \frac{(\rho_2 - \rho_1)(|k|V^2 - g)e^{-|k|z_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch}|k|H + \rho_1 \operatorname{sh}|k|H)(|k|V^2 - g)(1 - \psi(|k|))} \right] e^{-ik\xi} dk, \quad (7)$$

где  $\psi(|k|) = \omega_1^2(|k|)/(|k|^2 V^2)$ , а контур интегрирования слегка смещен в верхнюю полуплоскость. Для оценки интеграла (7) разобьем область интегрирования на два интервала (рис. 2):

$$\eta(\xi) = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{0+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk, \quad I_2 = \int_{0+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk.$$

Сделав в первом интеграле замену  $k = -u$ , получим

$$I_1 = \int_{0-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon} F(k, z_0) e^{ik\xi} dk.$$

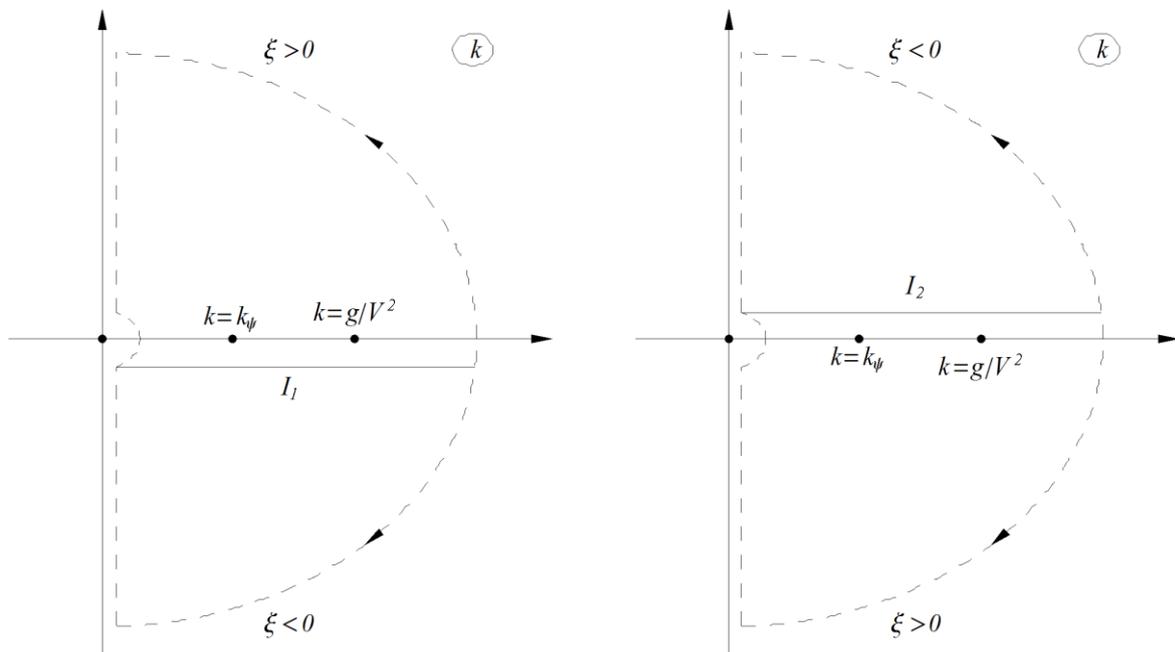


Рис. 2. Контур интегрирования для  $I_1$  и  $I_2$  — сплошные линии,

пунктирные кривые — направления замыкания контуров

Рассмотрим случай больших положительных  $\xi$ . Замкнув контур интегрирования для  $I_1$  в верхней полуплоскости, а для  $I_2$  — в нижней полуплоскости, получим, что  $\eta(\xi)$  состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое — интегралы типа Лапласа по мнимой оси, представляющие неволновую часть решения. Это слагаемое описывает впадину свободной поверхности непосредственно над рассматриваемым диполем. Можно показать, что при больших  $\xi$  его асимптотика есть  $O(1/\xi^2)$ . Второе слагаемое, определяющее собственно волновую структуру, — это вклады двух полюсов  $k = g/V^2$  и  $k = k_\psi$ . Первый полюс соответствует поверхностной моде

$$\eta_{\text{П}}(\xi) = -R \frac{2\rho_1 g e^{gz_0/V^2}}{V^3(\rho_2 \operatorname{ch}(g/V^2) + \rho_1 \operatorname{sh}(g/V^2))(1 - \psi(g/V^2))} \times \quad (8)$$

$$\times \sin(g\xi/V^2).$$

Второй полюс  $k_\psi$ , где  $k_\psi$  — действительный корень уравнения  $\psi(k) = 1$ , отвечает внутренней моде

$$\eta_{\text{В}}(\xi) = -R \left[ \frac{(\rho_2(kV^2 - g) + \rho_1(kV^2 + g))e^{kz_0}}{V(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(kV^2 - g)(-\psi'(k))} + \right. \quad (9)$$

$$\left. + \frac{(\rho_2 - \rho_1)(kV^2 - g)e^{-kz_0}}{V(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(kV^2 - g)(-\psi'(k))} \right] \sin k\xi \Big|_{k=k_\psi}.$$

Отметим, что внутренняя мода существует (т.е. уравнение  $\psi(k) = 1$  имеет вещественный корень  $k_\psi$ ) в случае, когда значение  $V$  меньше некоторого  $V_{\text{кр}}$ , которое определяется из соотношения

$$V_{\text{кр.}}^2 = gH \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (10)$$

При больших отрицательных значениях  $\xi$  контуры для вычисления  $I_1$  замкнем в нижней полуплоскости, а для  $I_2$  — в верхней. В этом случае соответствующие полюса вкладов не дадут, а интеграл по мнимой оси по-прежнему ведет себя, как  $O(1/\xi^2)$ . Отметим, что математическое представление поверхностных возмущений (8) и (9) имеет относительно простую физическую интерпретацию, которую совместно с результатами расчетов амплитуды возмущений рассмотрим позднее.

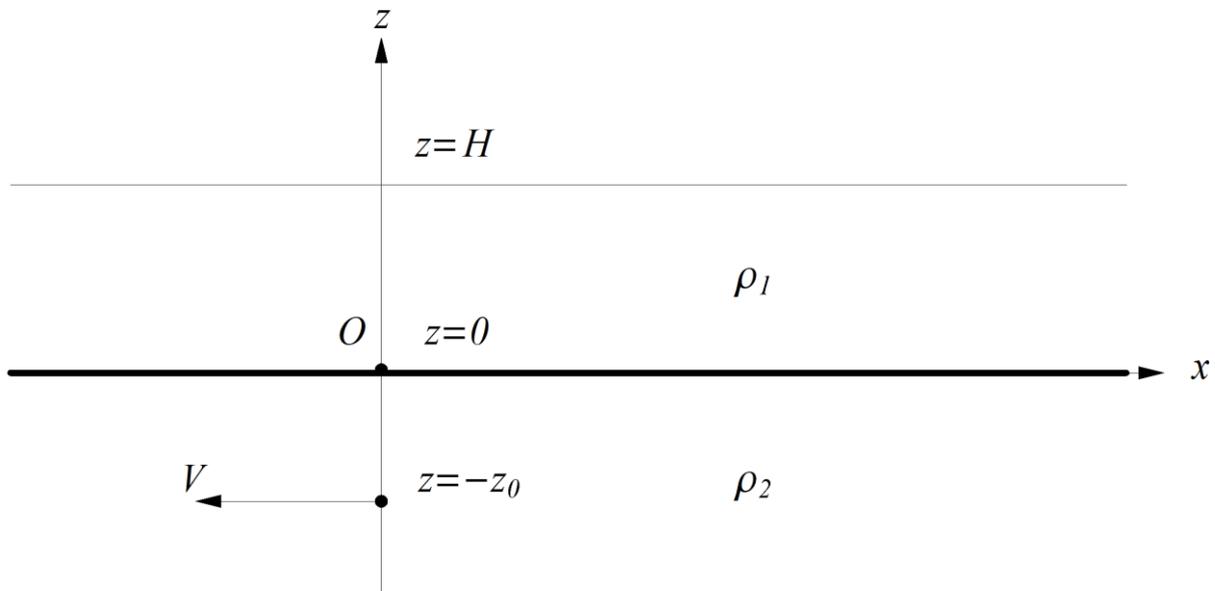


Рис. 3. Схема движения диполя в нижнем слое двухслойной жидкости  
в начальный момент времени

Препятствие под слоем скачка. В аналогичной постановке рассмотрим задачу о возбуждении поверхностных возмущений при движении

моделируемого точечным диполем препятствия под слоем скачка плотности жидкости. В начальный момент времени диполь находится в точке  $(0, -z_0)$  (рис. 3). С введением потенциала скоростей  $\Phi(x, z, t)$ ,  $\nabla\Phi = \vec{U}$ ,  $\vec{U} = (u, v)$  ( $u, v$  — соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей жидкости) математическая постановка данной задачи принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi(x, z, t) = \theta(t)\delta(z + z_0)\delta'(x + Vt), \Phi(x, z, t) \equiv 0 \text{ при } t < 0, \\ \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left( \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\Phi(x, z, t) = \begin{cases} \Phi_1(x, z, t), & 0 < z < H, \\ \Phi_2(x, z, t), & z < 0. \end{cases}$$

В терминах трансформанты Фурье потенциала

$$\tilde{\Phi}(k, \omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \Phi(x, z, t) dt$$

задача (11) формулируется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2} - k^2\tilde{\Phi} = \frac{k}{\omega - kV} \delta(z + z_0), \\ -\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial z} = \frac{\partial\tilde{\Phi}_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left( -\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left( -\omega^2 \tilde{\Phi}_2 + g \frac{\partial\tilde{\Phi}_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0, \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\tilde{\Phi}(k, \omega, z) = \begin{cases} \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z), & 0 < z < H, \\ \tilde{\Phi}_2(k, \omega, z), & z < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}_2(k, \omega, z) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z), & -z_0 < z < 0, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z), & z < -z_0. \end{cases}$$

Решение  $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$ , удовлетворяющее первому граничному условию в (12), имеет вид

$$\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) = A(k, \omega)(\omega^2 \operatorname{sh} k(z-H) + gk \operatorname{ch} k(z-H)).$$

Решение  $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$  ищется в виде  $B(k, \omega) \operatorname{sh} kz + D(k, \omega) \operatorname{ch} kz$ . Для полноты решения последнее нужно “сшить” с решением  $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$  ( $z > 0$ ) с помощью граничных условий при  $z = 0$ . На этом пути получим

$$\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) = A(k, \omega)[b(k, \omega) \operatorname{sh} kz + d(k, \omega) \operatorname{ch} kz],$$

$$b(k, \omega) = \omega^2 \operatorname{ch} kH - gk \operatorname{sh} kH,$$

$$d(k, \omega) = \left[ -\frac{\rho_1}{\rho_2} \omega^2 + \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \frac{g^2 k^2}{\omega^2} \right] \operatorname{sh} kH + gk \operatorname{ch} kH.$$

Для нахождения неизвестной функции  $A(k, \omega)$  воспользуемся условиями “сшивки” решений  $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$  и  $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) = C(k, \omega)e^{k|z|}$  при  $z = -z_0$ , следующими из первого уравнения в задаче (12):

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, -z_0) = \tilde{\varphi}_2(k, \omega, -z_0), \\ \left( \partial \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) \partial z - \partial \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) \partial z \right) \Big|_{z=-z_0} = \frac{k}{\omega - kV} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (-b \operatorname{sh} kz_0 + d \operatorname{ch} kz_0)A - e^{-kz_0}C = 0, \\ (b \operatorname{ch} kz_0 - d \operatorname{sh} kz_0)A - e^{-kz_0}C = \frac{1}{\omega - kV}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим выражения для  $A$  и  $C$ :

$$\begin{cases} A(k, \omega) = \frac{e^{-kz_0}}{(\omega - kV)(b - d)}, \\ C(k, \omega) = \frac{-b \operatorname{sh} kz_0 + d \operatorname{ch} kz_0}{(\omega - kV)(b - d)}. \end{cases}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \frac{\rho_2 \omega^2 \left[ \omega^2 \operatorname{sh} |k| (z - H) + g |k| \operatorname{ch} |k| (z - H) \right] e^{-|k|z_0}}{|k| (\rho_2 \operatorname{ch} |k| H + \rho_1 \operatorname{sh} |k| H) (\omega^2 - g |k|) (\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} \\ \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \left[ \frac{\rho_2 \omega^4 \operatorname{ch} |k| H \operatorname{sh} |k| z + (-\rho_1 \omega^4 + (\rho_1 - \rho_2) g^2 |k|^2) \operatorname{sh} |k| H \operatorname{ch} |k| z}{|k| (\rho_2 \operatorname{ch} |k| H + \rho_1 \operatorname{sh} |k| H) (\omega^2 - g |k|) (\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} + \right. \\ &\left. + \frac{\rho_2 \omega^2 g |k| \operatorname{ch} |k| (z - H)}{|k| (\rho_2 \operatorname{ch} |k| H + \rho_1 \operatorname{sh} |k| H) (\omega^2 - g |k|) (\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} \right] e^{-|k|z_0} \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \left[ \frac{-\rho_2 \omega^4 \operatorname{ch} |k| H \operatorname{sh} |k| z_0 + (-\rho_1 \omega^4 + (\rho_1 - \rho_2) g^2 |k|^2) \operatorname{sh} |k| H \operatorname{ch} |k| z_0}{|k| (\rho_2 \operatorname{ch} |k| H + \rho_1 \operatorname{sh} |k| H) (\omega^2 - g |k|) (\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} + \right. \\ &\left. + \frac{\rho_2 \omega^2 g |k| \operatorname{ch} |k| (z_0 + H)}{|k| (\rho_2 \operatorname{ch} |k| H + \rho_1 \operatorname{sh} |k| H) (\omega^2 - g |k|) (\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} \right] e^{|k|z} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\omega_1^2(k) = \frac{gk(\rho_2 - \rho_1) \operatorname{th} kH}{\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th} kH}$$

— дисперсионное соотношение для внутренней волны. Здесь, как и в формулах (5), везде вместо  $k$  стоит  $|k|$ , кроме множителя  $k/(\omega - kV)$ . Это обусловлено тем, что в решении  $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$  содержится  $|k|$  для обеспечения убывания решения с глубиной при всех значениях  $k$  (как положительных, так и отрицательных).

Далее, как и в первой задаче, проведем расчет величины возвышения поверхности жидкости с использованием процедуры обратного преобразования Фурье. В итоге для трансформанты Фурье с использованием выражения для  $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$  из (13) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(k, \omega) = & \frac{k}{\omega - kV} \times \\ & \times \frac{i\rho_2 \omega^3 e^{-|k|z_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k| H + \rho_1 \operatorname{sh} |k| H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}. \end{aligned} \quad (14)$$

Проводя обратное преобразование Фурье по  $\omega$ , из (14) имеем следующее выражение для стационарной части поверхностных возмущений при  $t \rightarrow \infty$  в системе отсчета, связанной с движущимся диполем:

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2\pi V} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2 |k| e^{-|k|z_0} e^{-ik\xi} dk}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k| H + \rho_1 \operatorname{sh} |k| H)(|k| - g/V^2)(1 - \psi(|k|))}, \quad (15)$$

где  $\psi(|k|) = \omega_1^2(|k|)/(|k|^2 V^2)$ ,  $\xi = x + Vt$ , а контур интегрирования слегка смещен в верхнюю полуплоскость. Для оценки интеграла (15) разобьем область интегрирования на два интервала (рис. 2):

$$\eta(\xi) = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{0+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk, I_2 = \int_{0+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk.$$

В итоге, проводя процедуры расчетов аналогично первой задаче, получим окончательные выражения для амплитуд двух мод волновой структуры (генерируемых диполем с моментом  $R$ ): поверхностной моды

$$\eta_{\Pi}(\xi) = -R \frac{2\rho_2 g e^{-gz_0/V^2}}{V^3 (\rho_2 \operatorname{ch}(gH/V^2) + \rho_1 \operatorname{sh}(gH/V^2)) (1 - \psi(g/V^2))} \times \sin(g\xi/V^2) \quad (16)$$

и внутренней моды

$$\eta_{\text{В}}(\xi) = -R \frac{2\rho_2 k e^{-kz_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(k - g/V^2)(-\psi'(k))} \sin(k\xi) \Big|_{k=k_{\psi}}. \quad (17)$$

Отметим, что как и для первой задачи, внутренняя мода возникает в случае, когда  $V$  меньше некоторого  $V_{\text{кр.}}$ , которое определяется тем же соотношением (10), что и для задачи (1). Поверхностная же мода в обоих случаях существует при любых значениях величины скорости набегающего потока, как и в классической задаче об обтекании препятствия потоком однородной жидкости бесконечной глубины.

Анализ и численные расчеты для реальных условий моря. Механизм генерации поверхностных возмущений, возникающих при обтекании

подводного препятствия и описываемых выражениями (8)–(9) и (16)–(17), относительно прост и представляется следующим образом. Так, для задачи (1) поверхностная мода (8) отражает эффект непосредственного обтекания дипольного препятствия потоком жидкости. В этом случае возмущения от него распространяются вверх (с выходом на поверхность, что и описывается (8)) и вниз. В последнем случае это вызывает возмущения самого слоя скачка плотности воды, колебания которого, в свою очередь, эволюционируют как вниз, исчезая на бесконечности (в рамках поставленной задачи), так и вверх, вызывая вторичные возмущения поверхности воды, что и описывается (9). При этом очевидно, что по своей энергии (и импульсу) вторичные колебания (за счет внутренней моды) слабее первых (соответствующие расчеты будут рассмотрены ниже).

В условиях задачи (11) — обтекание под границей раздела слоев — на распространение возмущений от препятствия вверх существенное влияние оказывает скачок плотности, “забирая” часть их энергии на свое возбуждение. Остальная часть (с учетом диссипации) идет на генерацию поверхностных возмущений, описываемых (16). В свою очередь, возбуждение от скачка, эволюционируя вверх, формирует вторичную (внутреннюю) моду (17) на поверхности воды. А возмущение от препятствия вниз полностью исчезает на бесконечности.

На рис. 4–6 наглядно продемонстрирован эффект влияния скачка плотности на изменение амплитуды поверхностной волны, возникающей при обтекании диполя.

Расчеты велись при значениях параметров, соответствующих реальным условиям открытого моря. Так, плотность верхнего слоя моря можно выбрать как  $\rho_1 = 1022 \text{ кг/м}^3$ , а плотность нижнего —  $\rho_2$  в пределах  $1023 \text{ кг/м}^3 \leq \rho_2 \leq 1029 \text{ кг/м}^3$ . Таким плотностям отвечают значения параметра  $\delta = \rho_1/\rho_2$  в пределах  $0.993 \leq \delta \leq 0.999$ . На графиках 4–6 расчеты проводились для трех вариантов мощности скачка плотности:  $\delta_1 = 0.996$ ,  $\delta_2 = 0.998$  и  $\delta_3 = 0.999$ . Момент диполя  $R$  задавался пропорциональным скорости его движения  $V$ :  $R/V = 1600 \text{ м}^2$ .

Для исследования влияния глубины локализации скачка расчеты велись при  $H = 50 \text{ м}$  и  $H = 70 \text{ м}$ , а положение препятствия (диполя) ограничивались тремя горизонтами:  $z_0 = 7 \text{ м}$ ,  $4 \text{ м}$  и  $1 \text{ м}$  как сверху, так и снизу от уровня границы раздела слоев воды.

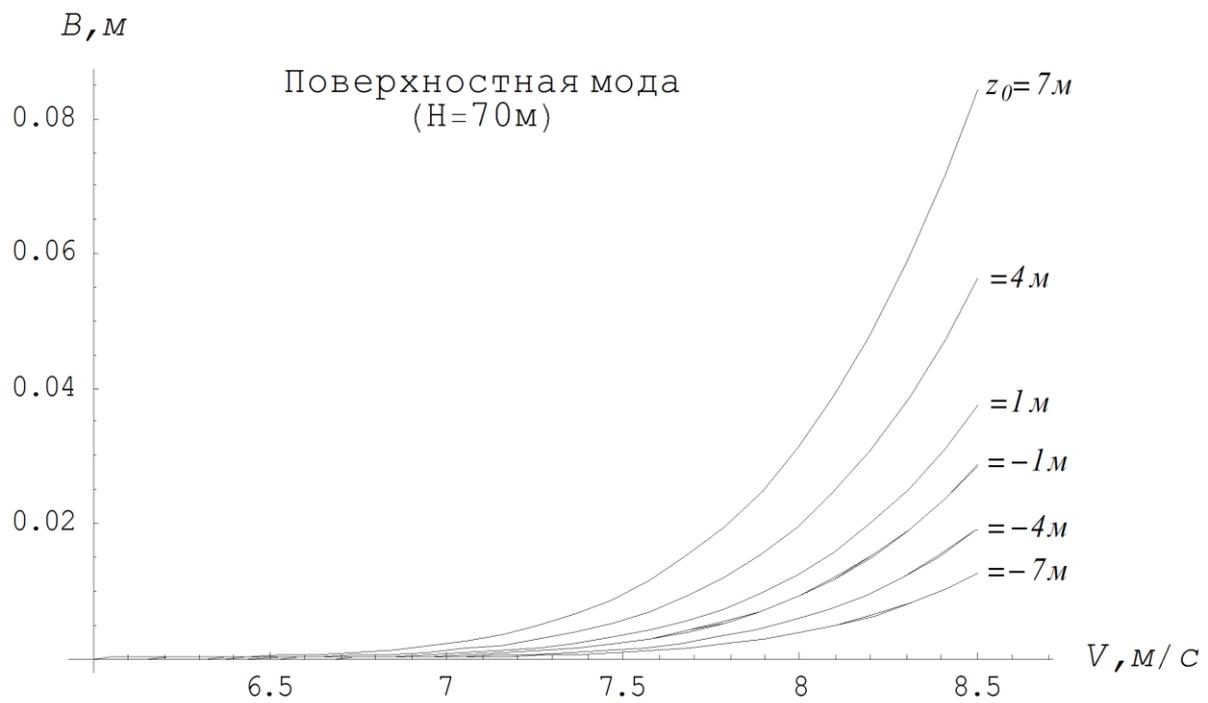
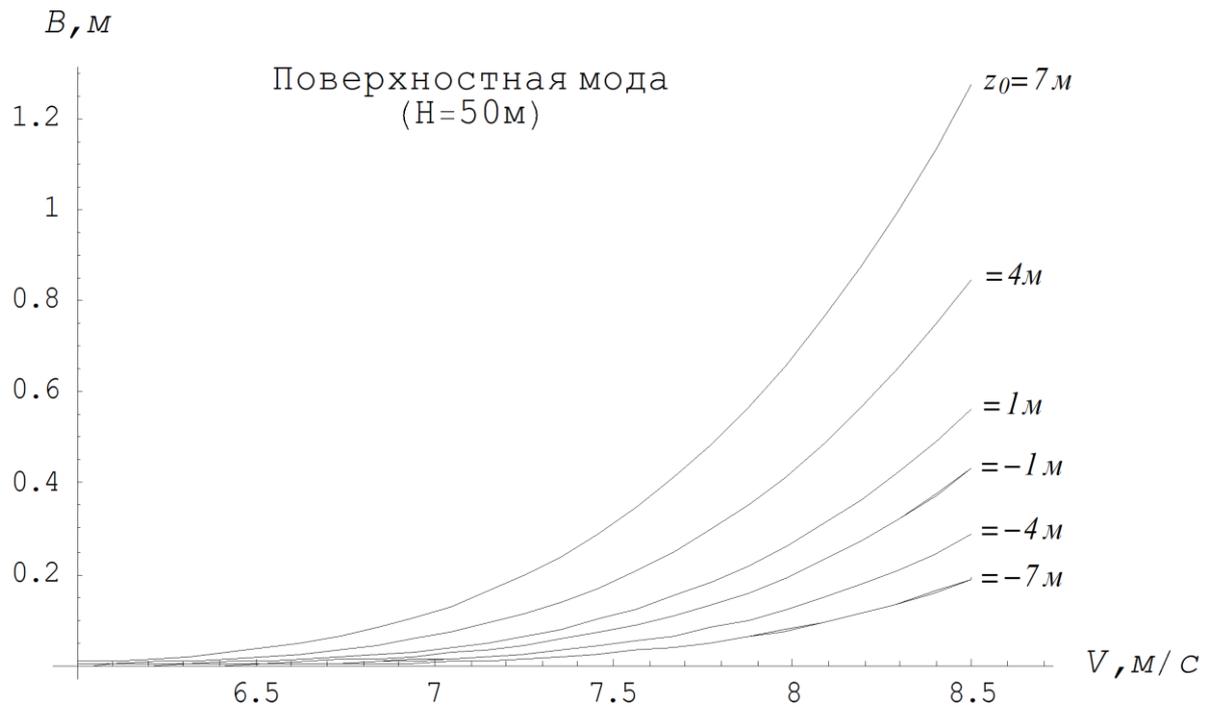


Рис. 4. Амплитуды поверхностной моды при обтекании препятствия над слоем скачка плотности и под ним в случаях  $H = 50\text{м}$  и  $H = 70\text{м}$

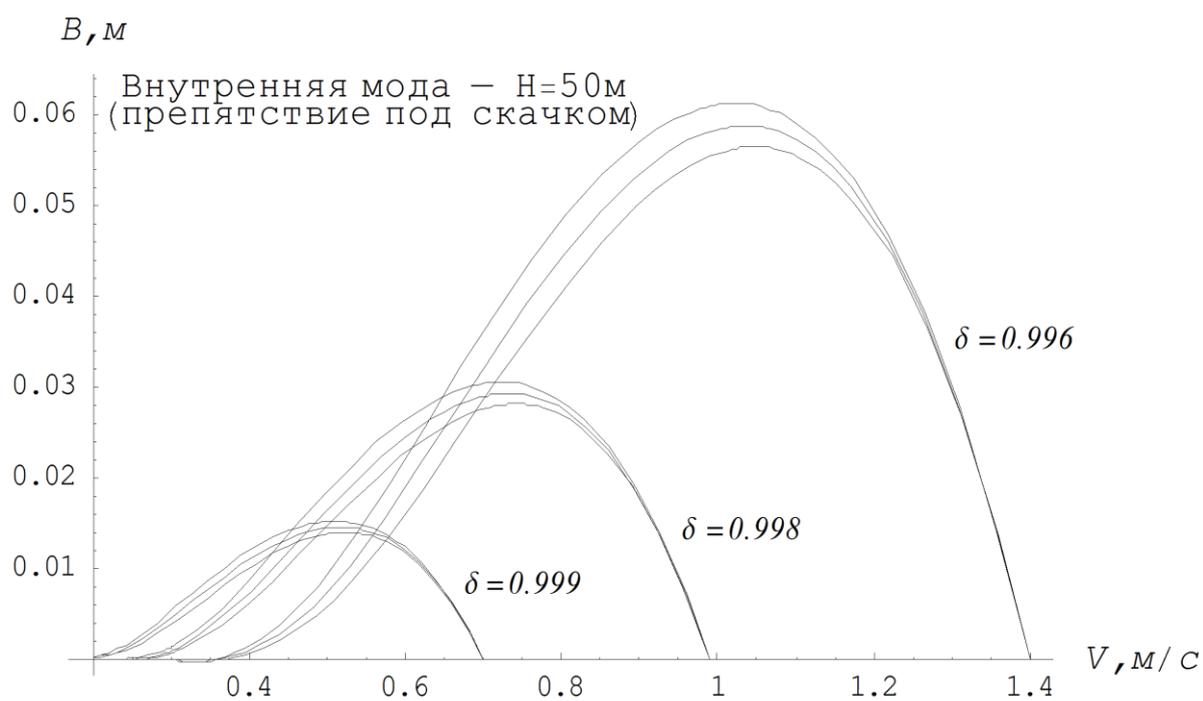
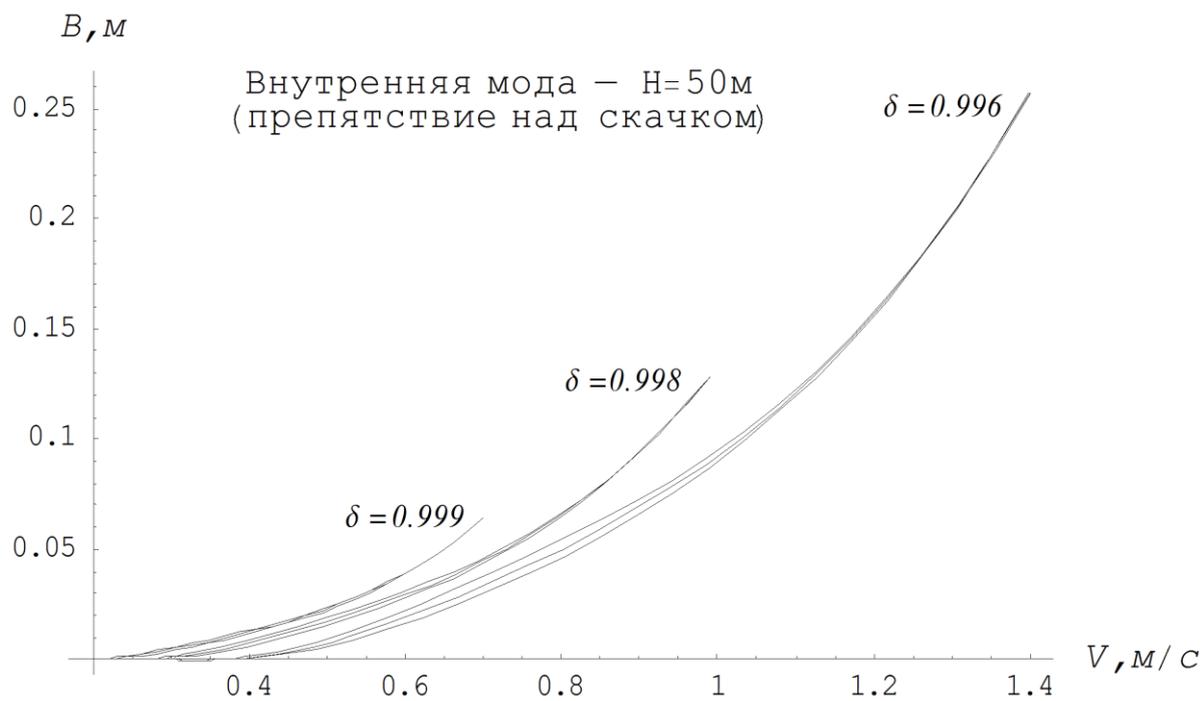


Рис. 5. Амплитуды внутренней моды при обтекании препятствия над  
слоем скачка плотности и под ним в случае  $H = 50\text{м}$

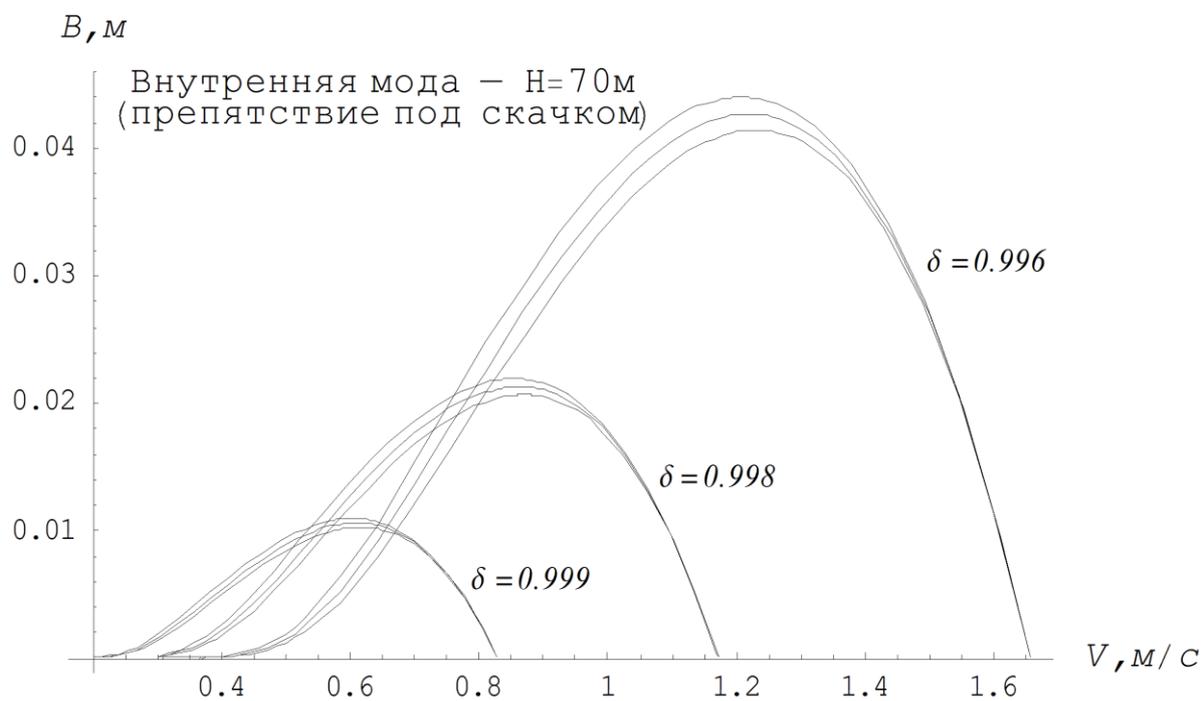
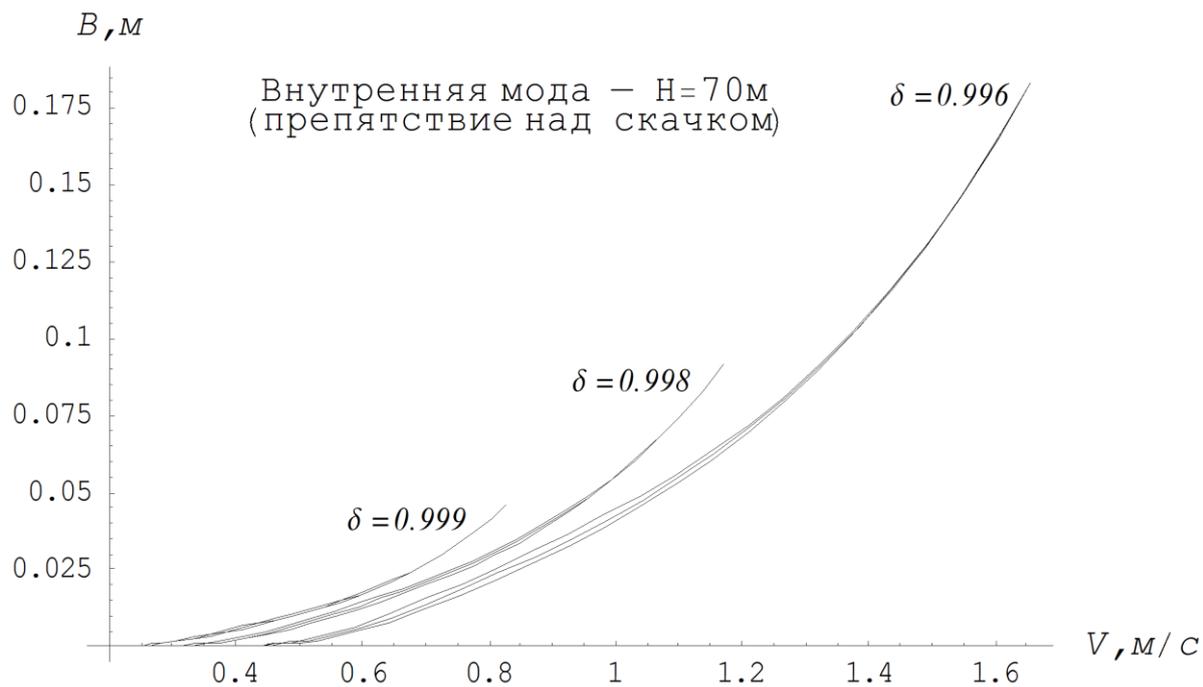


Рис. 6. Амплитуды внутренней моды при обтекании препятствия над  
слоем скачка плотности и под ним в случае  $H = 70\text{м}$

На рис. 4 приведены кривые амплитуд поверхностной моды  $B$ , рассчитанные над слоем скачка плотности (верхние три линии) и под ним (нижние три линии) для случаев  $H = 50\text{ м}$  и  $H = 70\text{ м}$ . Здесь следует отметить, что на каждой кривой расположены три группы точек, соответствующие трем значениям  $\delta_i$  ( $i=1,2,3$ ), что указывает на независимость поверхностной моды от мощности скачка плотности воды, т.е. такая мода проявляется непосредственно за счет обтекания диполя. Далее, на графиках видно, что амплитуды возмущений над скачком плотности существенно (в несколько раз!) выше соответствующих амплитуд под скачком. Сравнение значений  $B$  для двух различных глубин скачков плотности ( $50\text{ м}$  и  $70\text{ м}$ ) показывает, что углубление скачка также приводит к существенному уменьшению амплитуды возмущений на поверхности воды.

На рис. 5–6 приведены кривые, соответствующие амплитудам внутренней моды  $B$ , рассчитанные над слоем скачка плотности (верхние части) и под ним (нижние части) для случаев  $H = 50\text{ м}$  и  $H = 70\text{ м}$ . Необходимо отметить, что в обоих случаях с приближением препятствия к слою скачка амплитуда внутренней моды возрастает, т.е. уменьшению  $z_0$  соответствует увеличение  $B$ . На представленных графиках видно, что проявления амплитуд внутренней и поверхностной моды на интервале скорости обтекания препятствия  $V$  существенно разнесены между собой. Так, внутренняя мода в зависимости от  $\delta$  проявляется лишь при небольших скоростях  $V$ , а область проявления поверхностной моды существенно сдвинута в сторону больших  $V$ . Это

обусловлено “привязкой” внутренней моды к структуре скачка плотности (см. выражение (0)).

Сравнивая амплитуды возмущений внутренней (рис. 5–6) и поверхностной (рис. 4) мод, нужно отметить их существенную разницу в сторону увеличения последней (как и следовало ожидать). При этом, в отличие от поверхностной моды, для внутренней моды различно и ее поведение в случаях обтекания диполя над скачком плотности и под ним, причем как по форме, так и по величине  $B$ . Это указывает на характерную роль скачка плотности как неоднородности, блокирующей выход возмущений на морскую поверхность. Продолжая анализ кривых на рис. 5–6, отметим, что, как и в случае поверхностной моды, локализация по вертикали скачка плотности также влияет и на эволюцию внутренней моды и ее характеристики на поверхности воды. Однако в последнем случае это влияние несколько меньше.

Заканчивая анализ поверхностных возмущений, возникающих при обтекании препятствий в виде диполя, важно отметить, что параметры подобных поверхностных колебаний воды неоднократно выявлялись при радиолокационном мониторинге морской поверхности, проводимом в рамках специальных натуральных экспериментов.



**3.МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНОВЫХ  
ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ ИСТОЧНИКОВ В  
ПОТОКЕ: СВОБОДНАЯ ГРАНИЦА И «ТВЕРДАЯ КРЫШКА»**



Особенность в потоке под “твердой крышкой”. Пусть стационарный плоский поток идеальной несжимаемой однородной жидкости, ограниченный горизонтальной твердой стенкой, обтекает точечную особенность (источник или диполь), расположенную под этой стенкой. Введем оси координат: ось  $X$  направим вдоль стенки, а ось  $Y$  — вертикально вверх против вектора силы тяжести. Вначале рассмотрим задачу об обтекании плоского тела, моделируемого источником. Пусть поток со скоростью  $c$ , направленной вдоль оси  $X$ , набегаёт на источник мощности  $Q$ , находящийся в точке  $Z = -iH$  (где  $Z = X + iY$ ,  $H$  — расстояние от стенки до источника). Будем считать течение потенциальным. Пусть  $W(Z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$  — его комплексный потенциал,  $\Phi(X, Y)$  — потенциал,  $\Psi(X, Y)$  — функция тока ( $\Phi(X, Y)$  и  $\Psi(X, Y)$  являются сопряженными гармоническими функциями), а  $U$  и  $V$  — компоненты вектора скорости в произвольной точке потока. Тогда комплексный потенциал  $W(Z)$ , аналитичный в нижней полуплоскости всюду за исключением точки  $Z = -iH$ , должен удовлетворять следующим граничным условиям: условию непротекания на стенке

$$V = 0 \text{ при } Y = 0 \text{ или } \operatorname{Im}\left(\frac{dW}{dZ}\right) = 0 \text{ при } Y = 0; \quad (1)$$

условию однородности течения вдали от источника вверх по потоку

$$\frac{dW}{dZ} \rightarrow c \text{ при } X \rightarrow -\infty, Y \leq 0; \quad (2)$$

а также условию

$$W \square \frac{Q}{2\pi} \ln(Z + iH) \text{ при } Z \rightarrow -iH, \quad (3)$$

указывающему на местоположение источника.

Введем безразмерные переменные по формулам:

$$x = \frac{X}{H}, y = \frac{Y}{H}, z = \frac{Z}{H}, q = \frac{Q}{cH}, w = \frac{W}{cH}, \varphi = \frac{\Phi}{cH}, \psi = \frac{\Psi}{cH}. \quad (4)$$

В этих переменных математическая постановка исходной задачи об определении аналитической функции  $W$ , удовлетворяющей условиям (1–3), имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w(z) = 0 \text{ при } \text{Im } z < 0, z \neq -i, \\ \text{Im} \left( \frac{dw}{dz} \right) = 0 \text{ при } y = 0, \\ \frac{dw}{dz} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow -\infty, y \leq 0, \\ w(z) \square \frac{q}{2\pi} \ln(z + i) \text{ при } z \rightarrow -i. \end{array} \right. \quad (5)$$

Задача (5) решается методом отражений: в точке  $z = i$ , симметричной с местоположением исходного источника относительно действительной оси, помещается еще один источник мощности  $q$ , а функция  $w$  ищется как сумма комплексных потенциалов этих источников и однородного потока. Таким образом, функция

$$w = \frac{q}{2\pi} [\ln(z + i) + \ln(z - i)] + z \quad (6)$$

представляет собой искомый комплексный потенциал обтекания источника под твердой крышкой. В дальнейшем рассматриваются регулярные ветви логарифмов из (6): для  $\ln(z + i)$  выбирается ветвь в плоскости  $z$  с разрезом вдоль

луча  $[-i; +\infty - i)$ , принимающая действительные значения на верхнем берегу разреза, а для  $\ln(z - i)$  — ветвь в плоскости  $z$  с разрезом по лучу  $[i; +\infty + i)$ , также принимающая на верхнем берегу разреза действительные значения. С учетом сказанного выше для функции тока  $\psi(x, y)$  получаем из (6) следующую формулу:

$$\psi(x, y) = \frac{q}{2\pi} [\arg(x + i(y + 1)) + \arg(x + i(y - 1))] + y, \quad (7)$$

где  $0 \leq \arg(x + i(y + 1)) < 2\pi, 0 \leq \arg(x + i(y - 1)) < 2\pi$ . Линии тока определяются соотношением  $\psi(x, y) = \text{const}$ . Далее мы будем интересоваться разветвляющимися линиями тока, проходящими через критическую точку  $z_0$ ,

которая находится из условия  $\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = 0$ . Из (6) имеем для  $z_0$  квадратное

уравнение:  $z_0^2 + \frac{q}{\pi} z_0 + 1 = 0$ , дискриминант которого  $D = \left(\frac{q}{\pi}\right)^2 - 4$ . Разветвляющаяся

линия тока охватывающая источник существует лишь при  $D < 0$ , т.е. при  $q < 2\pi$

(в противном случае критическая точка  $z_0$  расположена на действительной оси,

и источник моделирует выступ на крышке). Решая полученное квадратное

уравнение при условии что  $q < 2\pi$ , находим  $z_0 = x_0 + iy_0$  ( $y_0 < 0$ ):

$z_0 = -\frac{q}{2\pi} - i\sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}$ . Далее по формуле (7) вычисляем значение функции тока в

критической точке:

$$\psi_0 = \psi(x_0, y_0) = q - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2} + \frac{q}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}}{q/2\pi} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}}{q/2\pi} \right) \right].$$

Таким образом, имеем уравнение разветвляющейся линии тока (сепаратрисы):

$$\frac{q}{2\pi} [\arg(x + i(y+1)) + \arg(x + i(y-1))] + y = \psi_0. \quad (8)$$

Задача об обтекании точечного диполя с моментом  $M$  решается аналогично, поэтому приведем лишь окончательные формулы без дополнительных пояснений. Комплексный потенциал рассматриваемого течения  $w(z)$ , функция тока  $\psi(x, y)$  и комплексно-сопряженная скорость  $\frac{dw}{dz}$  записываются следующим образом:

$$w(z) = \frac{m}{2\pi} \left[ \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right] + z,$$

$$\psi(x, y) = -\frac{m}{2\pi} \left[ \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2} \right] + y,$$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{m}{\pi} \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2} + 1.$$

Здесь  $m = \frac{M}{cH^2}$ , а остальные безразмерные переменные определены в (6.3.4).

Критическая точка  $z_0 = x_0 + iy_0$  ищется как корень уравнения  $\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = 0$  или

$$z_0^4 + \left(2 - \frac{m}{\pi}\right)z_0^2 + \left(\frac{m}{\pi} + 1\right) = 0,$$

удовлетворяющий условиям  $x_0 < 0, y_0 < 0$ :

$$z_0 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{m}{\pi} - 2\right) + i \sqrt{8\frac{m}{\pi} - \left(\frac{m}{\pi}\right)^2} \right]},$$

а искомая разветвляющаяся линия тока определяется из соотношения

$$-\frac{m}{2\pi} \left[ \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2} \right] + y = \psi(x_0, y_0).$$

Отметим, что сепаратриса целиком лежит ниже стенки (и не совпадает с ней) лишь при  $m < 8\pi$  (в противном случае диполь моделирует выступ на стенке).

Особенность в потоке со свободной поверхностью. Рассмотрим теперь в линейной постановке плоскую задачу о нахождении разветвляющейся линии тока при установившемся обтекании точечного источника потоком однородной жидкости со свободной границей (т.е. об определении формы тела, моделируемого точечным источником). Геометрию задачи и обозначения сохраним теми же, что и в предыдущем случае: поток со скоростью  $c$ , направленной вдоль положительной оси  $X$ , набегает на источник мощности  $Q$ , расположенный на глубине  $H$  (в точке  $Z = -iH$ ). Отметим, что на этот раз ось  $X$  совпадает с невозмущенной свободной границей жидкости.

Комплексный потенциал рассматриваемого течения представим в виде:

$$\begin{aligned} W(Z) &= W_1(Z) + cZ = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y) = \\ &= \Phi_1(X, Y) + i\Psi_1(X, Y) + c(X + iY). \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим через  $\zeta(X)$  форму свободной поверхности, а через  $U$  и  $V$ , как и ранее, — компоненты вектора скорости в произвольной точке потока:

$$U = U(X, Y) = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} + c, V = V(X, Y) = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial Y}. \quad (10)$$

Предполагая, что возмущения скорости течения и свободной границы затухают вверх по потоку, приходим к следующим граничным условиям:

$$\frac{dW}{dZ} \rightarrow c \text{ при } X \rightarrow -\infty (Y \leq 0) \text{ и } \zeta(X) \rightarrow 0 \text{ при } X \rightarrow -\infty. \quad (11)$$

Поскольку свободная поверхность жидкости является линией тока, вдоль нее справедлив интеграл Бернулли (динамическое условие на свободной границе), который с учетом (10) и (11) записывается в виде:

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial Y} \right)^2 + 2c \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} + c^2 \right] + \frac{p_a}{\rho} + g \zeta(X) = \frac{1}{2} c^2 + \frac{p_a}{\rho},$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $p_a$  — давление вдоль поверхности раздела “газ–жидкость” (атмосферное давление). Пренебрегая в этом соотношении квадратами малых величин  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial X}$  и  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial Y}$ , приходим к следующему краевому условию:

$$\zeta(X) = - \frac{c}{g} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \Big|_{Y=\zeta(X)}.$$

Считая последнее условие выполненным не на свободной поверхности  $Y = \zeta(X)$  (форма которой неизвестна заранее и подлежит определению), а на прямой  $Y = 0$ , окончательно имеем :

$$\zeta(X) = -\frac{c}{g} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \Big|_{Y=0}. \quad (12)$$

Совершаемая в результате этого ошибка имеет более высокий порядок малости, чем правая часть в (12). Действительно, по формуле Тейлора находим:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \Big|_{Y=\zeta(X)} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \Big|_{Y=0} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial Y \partial X} \Big|_{Y=0} \zeta(X) + \dots = \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \Big|_{Y=0} + o\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \Big|_{Y=0}\right).$$

Положим далее  $\Psi(X, Y) = 0$  вдоль свободной границы. Отсюда с учетом (9) имеем:

$$\Psi_1(X, Y) \Big|_{Y=\zeta(X)} = -c\zeta(X).$$

Перенося это условие со свободной поверхности на ось абсцисс (что допустимо в рамках линейной теории), получаем кинематическое граничное условие

$$\zeta(X) = -\frac{1}{c} \Psi_1(X, 0). \quad (13)$$

Исключим из соотношений (12) и (13)  $\zeta(X)$ . С учетом того, что  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial X} =$

$$= \operatorname{Im} \left[ i \frac{dW_1}{dZ} \right] = \operatorname{Im} \left[ i \left( \frac{dW}{dZ} - c \right) \right], \quad \Psi_1 = \operatorname{Im} W_1 = \operatorname{Im} [W - cZ], \text{ получим:}$$

$$\operatorname{Im} \left[ i \frac{dW}{dZ} - \frac{g}{c^2} W \right] = c \quad \text{вд } Y = 0.$$

Отсюда, в частности следует, что

$$\operatorname{Im} \left[ i \frac{d^2 W}{dZ^2} - \frac{g}{c^2} \frac{dW}{dZ} \right] = 0 \text{ при } Y = 0. \quad (14)$$

Кроме того для  $W(Z)$  должна быть выполнена асимптотическая оценка (3), означающая, что в точке  $Z = -iH$  расположен источник мощности  $Q$ . В

безразмерных переменных (4) исходная задача о нахождении комплексного потенциала  $W(Z)$ , удовлетворяющего условиям (11,14, 3), имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w(z) = 0 \text{ при } \text{Im } z < 0, z \neq -i, \\ \text{Im} \left[ i \frac{d^2 w}{dz^2} - E \frac{dw}{dz} \right] = 0 \text{ при } y = 0, \\ \frac{dw}{dz} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow -\infty, y \leq 0, \\ \text{Im } w \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty, y = 0 \\ w(z) \sim \frac{q}{2\pi} \ln(z+i) \text{ при } z \rightarrow -i. \end{array} \right. \quad (15)$$

Здесь  $E = \frac{gH}{c^2} = \frac{1}{\mathbf{F}^2}$ ,  $\mathbf{F}$  — число Фруда по глубине источника.

Для отыскания решения задачи (15) заметим прежде всего, что функцию

$$w_1(z) = w(z) - z, \quad (16)$$

можно представить в виде

$$w_1(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z+i) + g(z),$$

где  $g(z)$  — регулярная в нижней полуплоскости функция. Следовательно,

$$f(z) = i \frac{d^2 w_1}{dz^2} - E \frac{dw_1}{dz} = -\frac{iq}{2\pi} \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{qE}{2\pi i} \frac{1}{z+i} + f_1(z), \quad (17)$$

где функция  $f_1(z)$  также регулярна в нижней полуплоскости. Поскольку из второго условия в (15) вытекает, что  $f(z)$  принимает действительные значения на действительной оси, то по принципу симметрии Римана – Шварца ее можно аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость, полагая  $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ , где  $\text{Im } z > 0$ . Следовательно,

$$f(z) = \frac{iq}{2\pi} \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{qE}{2\pi} \frac{1}{z-ih} + \overline{f_1(z)} \quad (\text{Im } z > 0), \quad (18)$$

где функция  $\overline{f_1(z)}$  регулярна в верхней полуплоскости. Заметим далее, что функция

$$F(z) = -\frac{iq}{2\pi} \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{qE}{2\pi} \frac{1}{z+i} + \frac{iq}{2\pi} \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{qE}{2\pi} \frac{1}{z-i}$$

представима в виде (17) и (18) а также удовлетворяет краевому условию  $\text{Im}F(z) = 0$  при  $y = 0$ , равносильному второму условию в (15). Считая, что  $f(z)$  регулярна в бесконечно удаленной точке и  $f(\infty) = 0$ , приходим к выводу, что  $f(z) \equiv F(z)$ . Поэтому для искомой функции  $w_1(z)$  справедливо следующее дифференциальное уравнение:

$$i \frac{d^2 w_1}{dz^2} - E \frac{dw_1}{dz} = -\frac{q}{2\pi} \left[ \frac{i}{(z+i)^2} - \frac{i}{(z-i)^2} + \frac{E}{z+i} + \frac{E}{z-i} \right]. \quad (19)$$

Общим решением однородного уравнения, соответствующего (19), будет  $w_1(z) = A + Be^{-iEz}$ . Для отыскания частного решения неоднородного уравнения (19) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных: считая  $A$  и  $B$  функциями  $z$ , подставим  $A = A(z)$  и  $B = B(z)$  в (19). На этом пути получим следующую систему дифференциальных уравнений для определения функций  $A(z)$  и  $B(z)$ :

$$\begin{cases} \frac{dA}{dz} + e^{-iEz} \frac{dB}{dz} = 0, \\ E \frac{dB}{dz} e^{-iEz} = -\frac{q}{2\pi} \left[ \frac{i}{(z+i)^2} - \frac{i}{(z-i)^2} + \frac{E}{z+i} + \frac{E}{z-i} \right], \end{cases} \quad (20)$$

откуда имеем

$$\frac{dA}{dz} = \frac{q}{2\pi E} \left[ \frac{i}{(z+i)^2} - \frac{i}{(z-i)^2} + \frac{E}{z+i} + \frac{E}{z-i} \right].$$

Следовательно,

$$A(z) = -\frac{iq}{2\pi E} \left[ \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right] + \frac{q}{2\pi} [\ln(z+i) + \ln(z-i)]. \quad (21)$$

Из второго уравнения системы (20) находим  $B(z)$ :

$$B(z) = -\frac{q}{2\pi E} \int_{-\infty}^z e^{iEt} \left[ \frac{i}{(t+i)^2} - \frac{i}{(t-i)^2} + \frac{E}{t+i} + \frac{E}{t-i} \right] dt.$$

С помощью интегрирования по частям приходим к следующим формулам:

$$\int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{(t+i)^2} dt = -\int_{-\infty}^z e^{iEt} d\left(\frac{1}{t+i}\right) = -\frac{e^{iEz}}{z+i} + iE \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t+i} dt$$

и

$$\int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{(t-i)^2} dt = -\frac{e^{iEz}}{z-i} + iE \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt.$$

Поэтому

$$B(z) = \frac{iq}{2\pi E} e^{iEz} \left[ \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right] - \frac{q}{\pi} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt. \quad (22)$$

Из (21) и (22) находим:

$$w_1(z) = A(z) + B(z)e^{-iEz} = \frac{q}{2\pi} [\ln(z+i) + \ln(z-i)] - \frac{q}{\pi} e^{-iEz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt,$$

откуда с учетом соотношения (16) получаем искомое выражение для комплексного потенциала:

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} [\ln(z+i) + \ln(z-i)] - \frac{q}{\pi} e^{-iEz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt + z. \quad (23)$$

Здесь интегрирование осуществляется по любому пути, лежащему в полуплоскости  $Im z \leq 0$ , а ветви логарифмов выбраны теми же, что и в (6).

Дифференцируя (23) по  $z$ , находим комплексно-сопряженную скорость  $u - iv$ :

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = \frac{q}{\pi} \left[ -\frac{i}{z^2 + 1} + iEe^{-iEz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt \right] + 1,$$

а выделяя в (23) мнимую часть, получаем выражение для функции тока  $\psi(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & \frac{q}{2\pi} [\arg(x + i(y+1)) + \arg(x + i(y-1))] + y - \\ & - \frac{q}{\pi} \operatorname{Im} \left[ e^{-iEz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt \right], \end{aligned} \quad (24)$$

где, как и ранее,  $\arg(x + i(y+1)) \in [0; 2\pi)$ ,  $\arg(x + i(y-1)) \in [0; 2\pi)$ . Далее из уравнения

$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = 0$  определяется критическая точка  $z_0 = x_0 + iy_0$ , лежащая в нижней

полуплоскости. Наконец, приравнявая функцию тока  $\psi(x, y)$  ее значению в

точке  $z_0$ , получаем искомое неявное соотношение для разветвляющейся линии

тока:

$$\begin{aligned} & \frac{q}{2\pi} [\arg(x + i(y+1)) + \arg(x + i(y-1))] + y - \\ & - \frac{q}{\pi} \operatorname{Im} \left[ e^{-iEz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt \right] = \psi_0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\psi_0 = \psi(x_0, y_0).$$

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении асимптотического положения сепаратрисы при больших положительных  $x$ . Для этого сначала вычислим

асимптотику интеграла  $J = \int_{-\infty}^{x+iy} \frac{e^{iEt}}{t-i} dt$ , фигурирующего в (25), с точностью до

$O\left(\frac{1}{x}\right)$ . Выбрав в качестве пути интегрирования ломаную линию, состоящую из

луча  $(-\infty; x]$  и вертикального отрезка  $[x; x+iy]$ , представим  $J$  в виде суммы  $J_1 + J_2$

, где  $J_1 = \int_{-\infty}^x \frac{e^{iEt}}{t-i} dt$ ,  $J_2 = \int_x^{x+iy} \frac{e^{iEt}}{t-i} dt$ . В свою очередь интеграл  $J_1$  запишем в

следующем виде:  $J_1 = I - J_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iEt}}{t-i} dt - \int_x^{+\infty} \frac{e^{iEt}}{t-i} dt$ . Для вычисления  $I$  введем

вспомогательный контур  $\Gamma_R$ , составленный из отрезка  $[-R; R]$  и

полуокружности  $C_R$  ( $|z|=R$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ ). В силу леммы Жордана  $\int_{C_R} \frac{e^{iEt}}{t-i} dt \rightarrow 0$ ,

поэтому  $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iEt}}{t-i} dt$ . Так как подынтегральная функция  $\frac{e^{iEt}}{t-i}$  имеет в верхней

полуплоскости единственную особую точку (а именно полюс первого порядка в

точке  $z=i$ ), то по теореме о вычетах  $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iEt}}{t-i} dt = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{iEt}}{t-i} = 2\pi i e^{-E}$ . Следовательно,

$I = 2\pi i e^{-E}$ . Далее, с помощью интегрирования по частям приходим к

следующему соотношению для  $J_3$ :

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{t-i} d\left(\frac{e^{iEt}}{iE}\right) = \frac{e^{iEt}}{iE(t-i)} \Big|_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{iEt}}{iE(t-i)^2} dt = \\ &= \frac{i}{E} \frac{e^{iEx}}{x-i} + O\left(\frac{1}{(x-i)^2}\right) = \frac{i}{E} \frac{e^{iEx}}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \end{aligned}$$

откуда находим  $J_1 = I - J_3 = 2\pi i e^{-E} - \frac{i}{E} \frac{e^{iEx}}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

Перейдем теперь к оценке интеграла  $J_2$ . Имеем:

$$J_2 = \int_x^{x+iy} \frac{e^{iEt}}{t-i} dt = \int_0^y \frac{e^{iEx} e^{-E\eta}}{x+i(\eta-1)} i d\eta = i \frac{e^{iEx}}{x} \int_0^y \frac{e^{-E\eta}}{1+i\frac{\eta-1}{x}} d\eta.$$

Разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора по степеням  $i\frac{\eta-1}{x}$ ,

нетрудно получить искомую оценку для  $J_2$ :

$$J_2 = i \frac{e^{iEx}}{x} \int_0^y e^{-E\eta} d\eta + O\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{i(1-e^{-Ey})}{E} \frac{e^{iEx}}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Следовательно,  $J = J_1 + J_2 = 2\pi i e^{-E} - \frac{i e^{-Ey} e^{iEx}}{E} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  и

$$-\frac{q}{\pi} \operatorname{Im} J = -2q e^{E(y-1)} \cos Ex + \frac{q}{\pi E x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (26)$$

Найдем далее асимптотику первого слагаемого в левой части уравнения (24) для функции тока  $\psi(x, y)$ . Для точек, лежащих на верхней ветви сепаратрисы, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{q}{2\pi} [\arg(x+i(y+1)) + \arg(x+i(y-1))] = \\ & = \frac{q}{2\pi} \left[ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y+1}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y-1}{x} \right] = q + \frac{q}{\pi} \frac{y}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично на нижней ветви сепаратрисы

$$\begin{aligned} & \frac{q}{2\pi} [\arg(x+i(y+1)) + \arg(x+i(y-1))] = \\ & = \frac{q}{2\pi} \left[ 4\pi + \operatorname{arctg} \frac{y+1}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y-1}{x} \right] = 2q + \frac{q}{\pi} \frac{y}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя (26), (27), (28) в (25) и пренебрегая членами высшего чем  $O\left(\frac{1}{x}\right)$  порядка малости, получаем искомые уравнения, определяющие

асимптотическое поведение соответственно верхней и нижней ветвей сепаратрисы при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\frac{q}{\pi} \left( y + \frac{1}{E} \right) \frac{1}{x} - 2qe^{E(y-1)} \cos Ex + y = \psi_0, \quad (29)$$

$$q + \frac{q}{\pi} \left( y + \frac{1}{E} \right) \frac{1}{x} - 2qe^{E(y-1)} \cos Ex + y = \psi_0.$$

Вычислим еще амплитуду волны на верхней ветви сепаратрисы.

Отбрасывая в левой части (29) слагаемое порядка  $O\left(\frac{1}{x}\right)$ , перепишем это

соотношение в виде:

$$\cos Ex = \frac{y - \psi_0}{2qe^{E(y-1)}} \quad (30)$$

Рассматривая последнее уравнение как неявное задание зависимости  $y$  от  $x$ , нетрудно определить  $y_1$  и  $y_2$ , т.е. асимптотическое положение верхней и нижней границ верхней ветви сепаратрисы. Действительно, правая часть в (30) монотонно возрастает при отрицательных  $y$ , поэтому  $y_1$  определяется как корень уравнения

$$\frac{y - \psi_0}{2qe^{E(y-1)}} = 1,$$

а  $y_2$  является отрицательным корнем уравнения

$$\frac{y - \psi_0}{2qe^{E(y-1)}} = -1,$$

откуда для искомой амплитуды  $a$  имеем формулу

$$a = \frac{1}{2}(y_2 - y_1). \quad (31)$$

Отметим еще, что асимптотика верхней ветви сепаратрисы в задаче об обтекании источника вблизи твердой стенки записывается в виде

$$y = \left[ \frac{q}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}}{q/2\pi} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}}{q/2\pi} \right) \right] - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2} \right] \left( 1 - \frac{q}{\pi x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right),$$

откуда следует, что на этой ветви

$$y \rightarrow \frac{q}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}}{q/2\pi} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}}{q/2\pi} \right) \right] - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2} \quad (32)$$

при  $x \rightarrow +\infty$ .

Решение задачи об определении формы тела, обтекание которого потоком со свободной поверхностью моделируется диполем, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{m}{2\pi} \left[ \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right] + \frac{imE}{\pi} e^{-iEz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt + z, \\
\frac{dw}{dz} &= \frac{m}{\pi} \left[ \frac{2iz}{(z^2+1)^2} + \frac{iE}{z-i} + E^2 e^{-iEz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt \right] + 1, \\
\psi(x, y) &= \frac{m}{2\pi} \left[ \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} - \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} \right] + \\
&\quad + \frac{mE}{\pi} \operatorname{Re} \left[ e^{-iEz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt \right] + y
\end{aligned}$$

— соответственно комплексный потенциал, комплексно-сопряженная скорость и функция тока. Искомая разветвляющаяся линия тока, охватывающая рассматриваемый диполь, задается соотношением

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{2\pi} \left[ \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} - \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} \right] + \\
&+ \frac{mE}{\pi} \operatorname{Re} \left[ e^{-iEz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{iEt}}{t-i} dt \right] + y = \psi(x_0, y_0),
\end{aligned}$$

где  $z_0 = x_0 + iy_0$  — корень уравнения  $\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = 0$  такой, что  $x_0 < 0$ ,  $y_0 < 0$ .

На рис. 1 приведены результаты расчета формы тела, моделируемого источником в потоке вблизи твердой стенки, для всех значений его мощности  $q$ , принадлежащих множеству  $\{1, 0.5, 0.2, 0.1\}$ . Для сравнения пунктиром изображены сепаратрисы в задаче об обтекании источника той же мощности безграничным потоком. С целью качественной интерпретации результатов расчетов введем параметр  $D$  (размерный), характеризующий толщину обтекаемого тела при  $x \rightarrow +\infty$ . Ясно, что в обоих случаях значение  $D$  может быть вычислено по формуле  $D = Q/c$ . Обозначим также через  $\Delta Y$  размерное асимптотическое смещение тела, моделируемого источником вблизи стенки, по

сравнению с телом, моделируемым в безграничном потоке, а через  $\Delta y_D$  — относительное смещение  $\Delta Y/D$ . Заметим, что для  $\Delta y_D$  справедлива формула

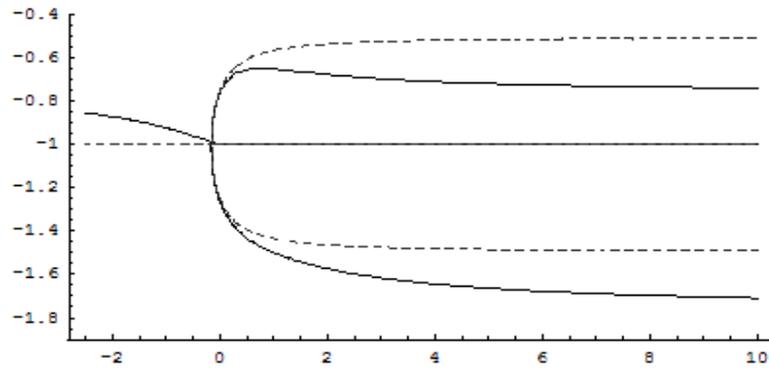
$$\Delta y_D = \frac{\Delta Y}{H} \frac{H}{D} = \Delta y \frac{cH}{Q} = \frac{\Delta y}{q}, \quad (33)$$

где  $\Delta y = \Delta Y/H$ . Возвращаясь к обсуждению рис. 1, можно отметить, что наличие стенки в потоке искажает форму моделируемого источником тела, делая его несимметричным относительно прямой  $y = -1$  и смещая при  $x \rightarrow +\infty$  вниз примерно на четверть толщины (т.е.  $\Delta y_D \approx -1/4$ ). Кроме того, при уменьшении  $q$  параметр относительного смещения  $\Delta y_D$  не стремится к нулю, как этого можно было бы ожидать. С целью математического объяснения этого эффекта заметим прежде всего, что в задаче об обтекании источника безграничным потоком на верхней ветви разветвляющейся линии тока при  $x \rightarrow +\infty$  выполнено асимптотическое соотношение  $y \rightarrow -1 + q/2$ . Отсюда с учетом (32) и (33) получаем

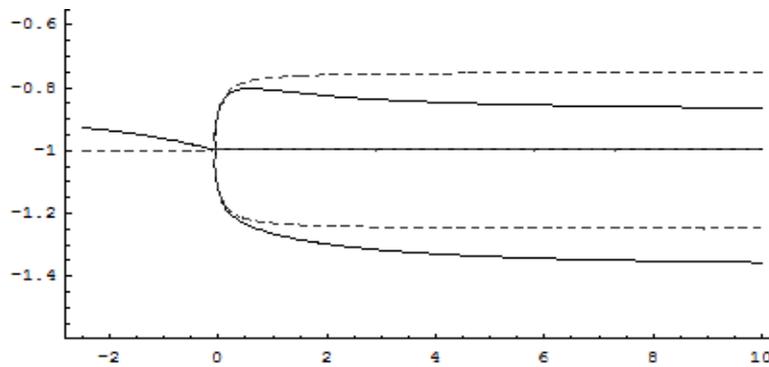
$$\Delta y_D = \frac{1}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}}{q/2\pi} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}}{q/2\pi} \right) \right] - \frac{1}{q} \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

Разлагая при малых  $q$  правую часть последней формулы в ряд Тейлора по степеням  $q$ , приходим к равенству  $\Delta y_D = -1/4 - q/(8\pi^2) + O(q^3)$ , находящемуся в полном соответствии с рис. 1. Сказанное выше иллюстрируется также рис. 2, на

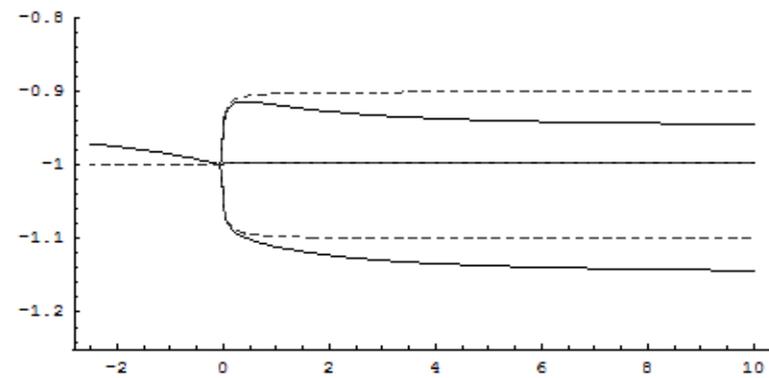
котором изображен график зависимости величины относительного смещения  $\Delta y_D$  от мощности  $q$ .



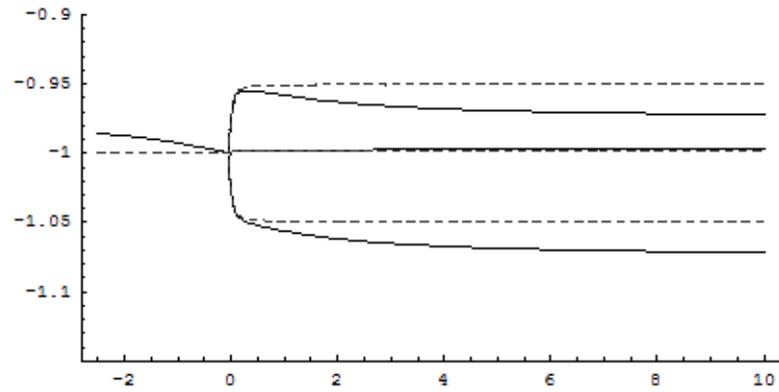
а)  $q=1$



б)  $q=0.5$



В)  $q = 0.2$



Г)  $q = 0.1$

Рис. 1. Источник у стенки при различных значениях  $q$

(пунктиром — источник в безграничном потоке)

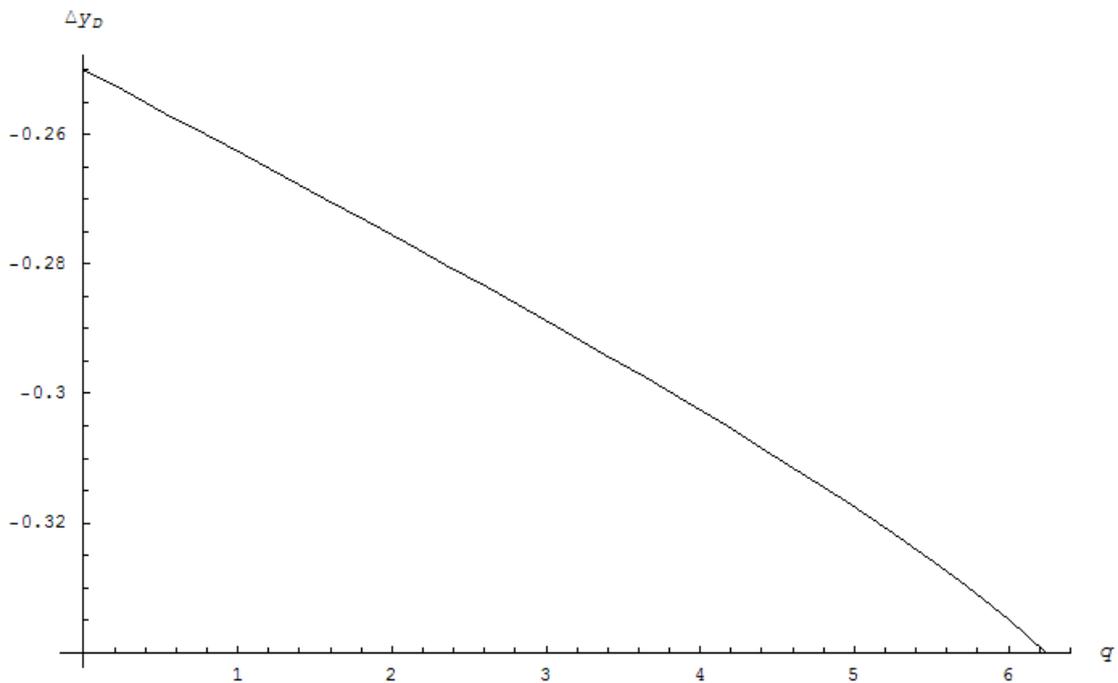


Рис. 2. Зависимость смещения  $\Delta y_D$  от мощности источника  $q$

Нетрудно также показать, что относительно сходимости при  $H \rightarrow \infty$  решения задачи об обтекании источника у стенки  $Y_1(X)$  к соответствующему

решению задачи о его обтекании безграничным потоком  $Y_2(X)$  справедливы следующие два утверждения:

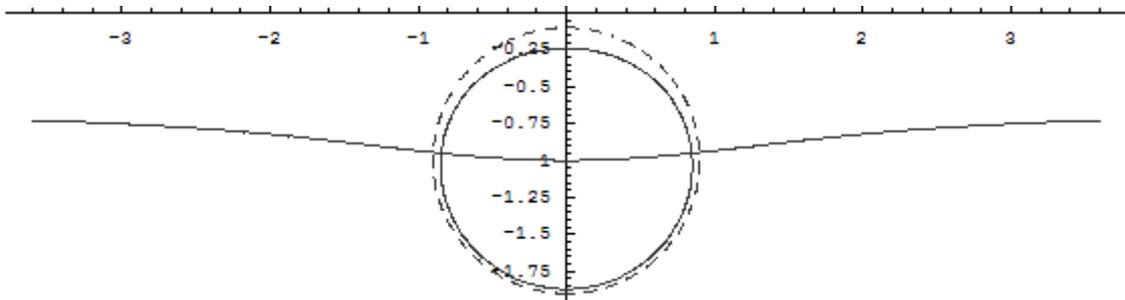
а)  $\lim_{H \rightarrow \infty} |Y_1(X) - Y_2(X)| = 0$  для  $\forall X$ , т.е. при любых значениях  $X$  имеет место поточечная сходимость.

б) Для  $\forall \varepsilon > 0$  и  $X_1, X_2 \in R$  существует такое значение  $H = H_0$ , что  $|Y_1(X) - Y_2(X)| < \varepsilon$  при любых  $X \in [X_1; X_2]$  и  $H > H_0$ . Другими словами, на любом конечном отрезке оси  $X$  эта сходимость носит равномерный характер. Однако, как указывалось выше, она не является равномерной на всей оси  $X$ .

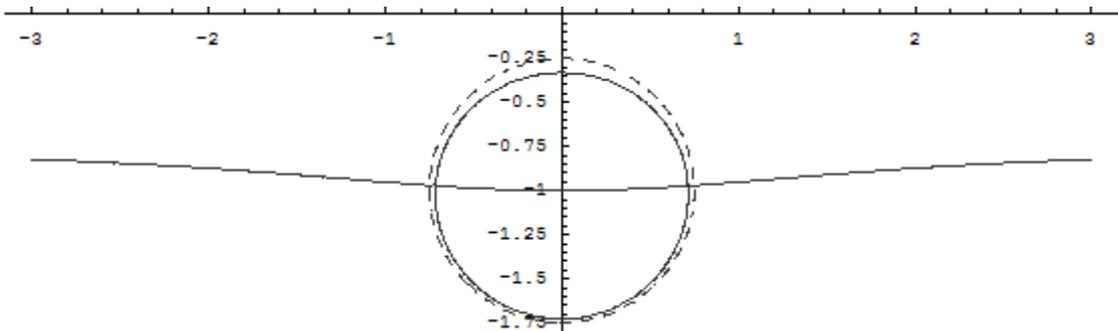
Таким образом, в задаче об отыскании формы тела, обтекание которого моделируется источником у стенки, наличием последней нельзя пренебрегать (т.е. считать поток безграничным) ни при каких значениях параметра  $q$ .

Для рассмотрения результатов численных расчетов в задаче об обтекании диполя вблизи стенки введем параметр  $r$ , равный радиусу цилиндра, эквивалентного обтеканию диполя с моментом  $m$  в безграничном потоке. Известно, что  $r = \sqrt{m/(2\pi)}$ . В отличие от задачи об обтекании источника вблизи стенки в данном случае при  $r \rightarrow 0$  решение сходится к соответствующему решению задачи об обтекании диполя безграничным потоком. На рис. 3 сплошными линиями представлены результаты расчета формы тела, моделируемого диполем вблизи стенки при  $r \in \{0.9, 0.75, 0.5, 0.35\}$ , пунктиром изображены контуры цилиндров радиуса  $r$ . Видно, что с убыванием  $r$  относительное искажение формы тела, отвечающего диполю, уменьшается,

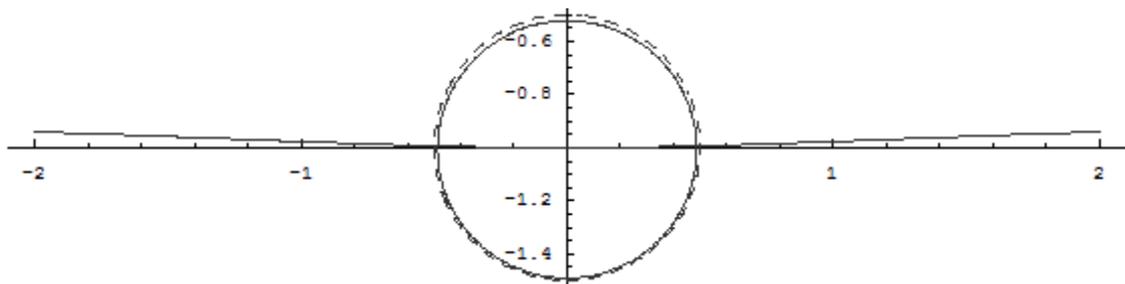
становясь весьма незначительным уже при  $r=0.35$ . Таким образом, при моделировании обтекаемого у стенки тела диполем ее присутствие можно не учитывать при  $r \leq 0.35$ , тем самым считая поток безграничным.



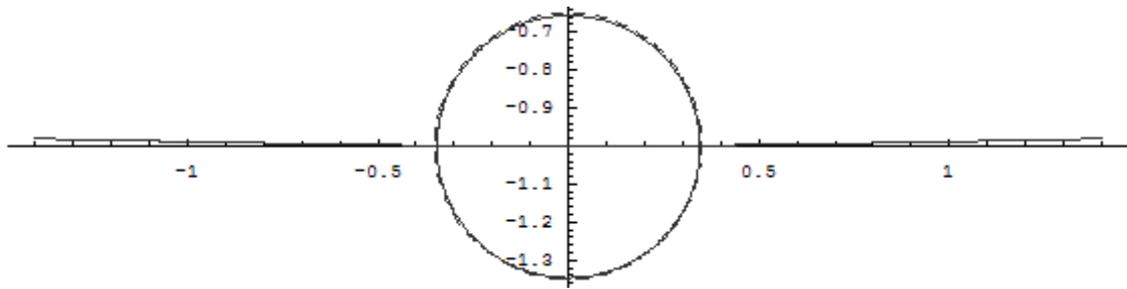
а)  $r = 0.9$



б)  $r = 0.75$



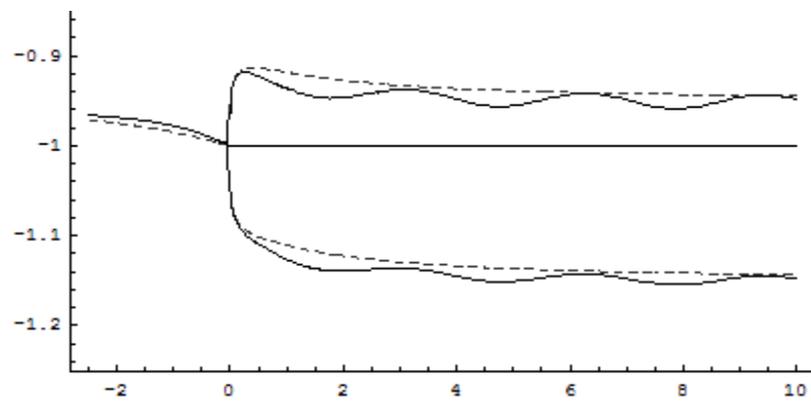
в)  $r = 0.5$



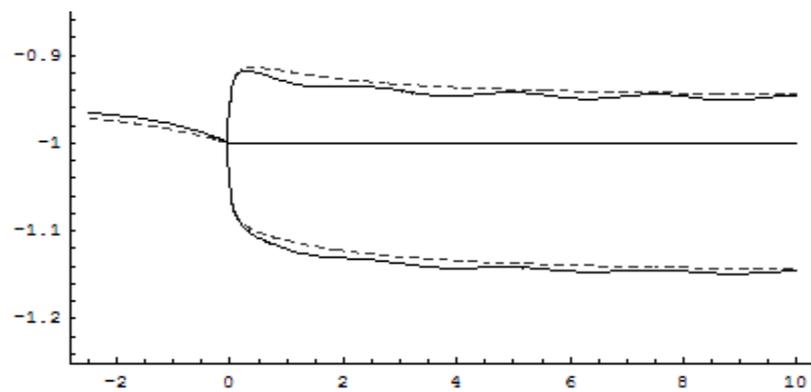
г)  $r = 0.35$

Рис. 3. Диполь у стенки при различных значениях  $r$

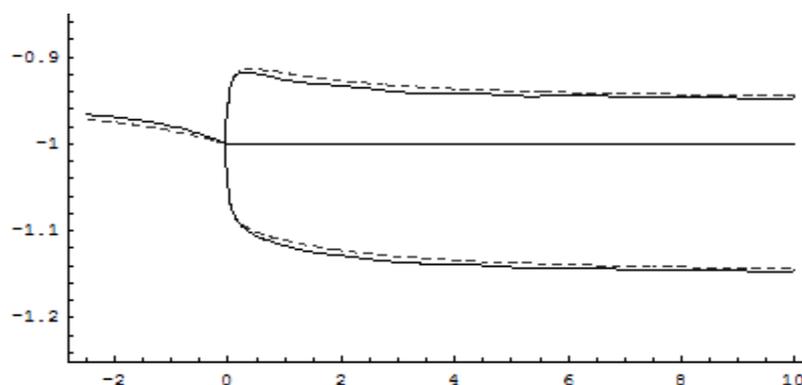
(пунктиром — диполь в безграничном потоке)



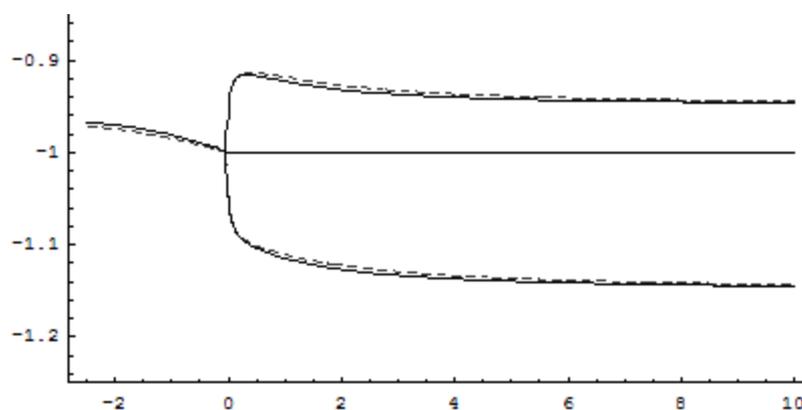
а)  $E = 2$



б)  $E = 2.5$



в)  $E = 3$



г)  $E = 4$

Рис.4. Источник под свободной поверхностью при различных значениях  $E$ ,  $q = 0.2$  (пунктиром — источник у стенки)

Обратимся теперь к вопросу о возможности замены свободной поверхности твердой крышкой. Вначале рассмотрим случай обтекания источника. В качестве параметра  $a_D$ , характеризующего степень искажения моделируемого им тела по сравнению с телом, соответствующим обтеканию источника вблизи стенки, выберем отношение амплитуды волны (размерной) на верхней ветви сепаратрисы к толщине  $D$ , введенной выше. Ясно, что  $a_D = a/q$ , где величина  $a$  определена ранее (формула (31)). Примем за критерий

возможности замены свободной поверхности твердой стенкой выполнение условия  $a_D \leq 0.01$ . Как показывают проведенные численные эксперименты, выполнение данного условия обеспечивается при  $q \leq 1, E \geq 3$ . Например, на рис. 4 изображена эволюция формы моделируемого источником тела при изменении величины  $E$  от 2 до 4 для случая  $q = 0.2$  (пунктиром показано соответствующее положение тела в потоке, ограниченном твердой стенкой). Как видно, уже при  $E = 3$  волна на сепаратрисе становится практически неразличимой. На рис. 5 приведены графики зависимости параметра  $a_D$  от величины  $E$  при различных значениях  $q$ . Положение каждой конкретной кривой  $a_D = a_D(E)$  слабо зависит от мощности источника  $q$  и неравенство  $a_D \leq 0.01$  выполнено при  $q \leq 1, E \geq 3$ .

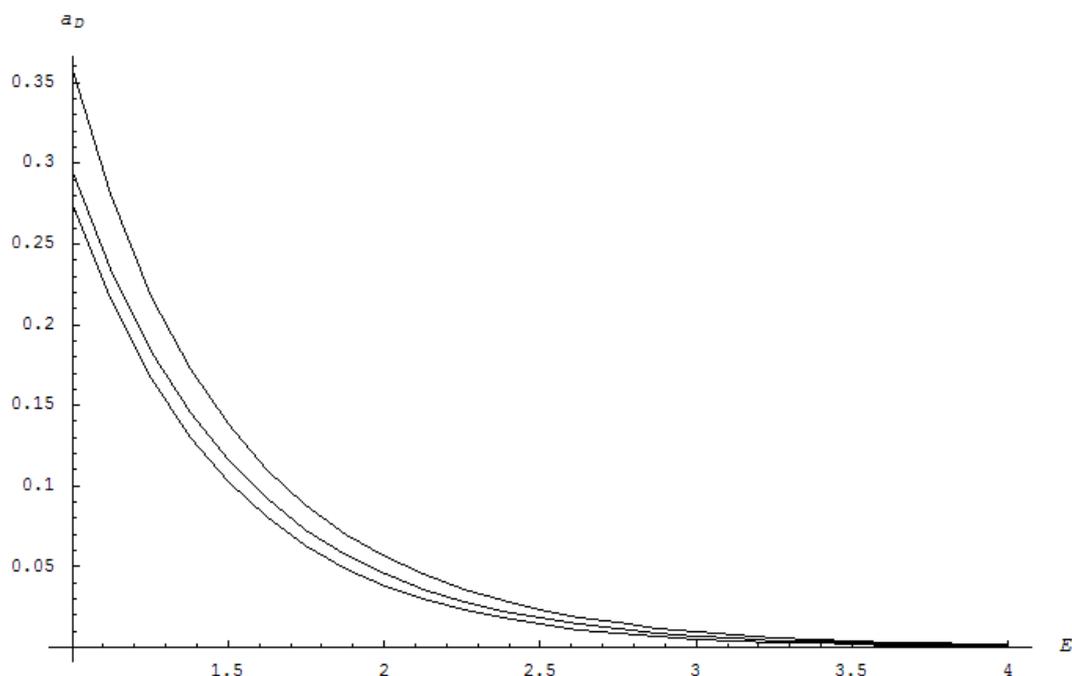
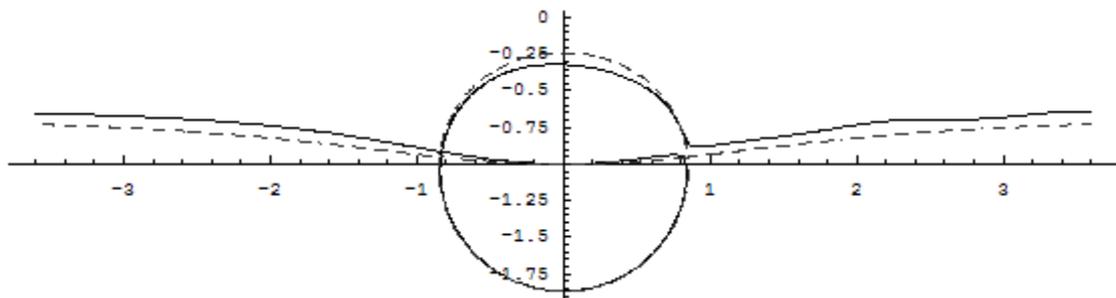
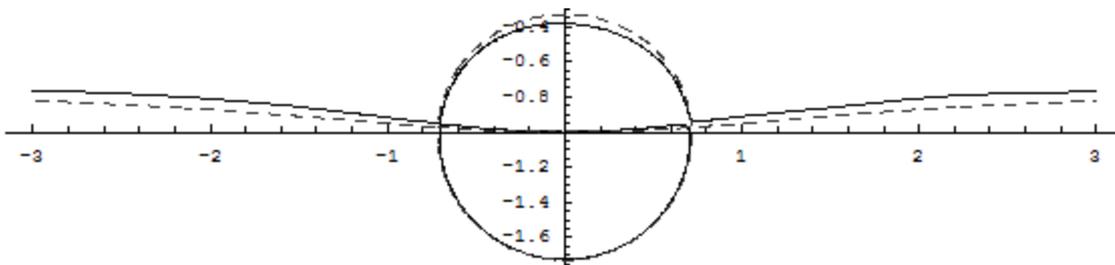


Рис. 5. Зависимость амплитуды волны  $a_D$  от параметра  $E$  при различных значениях  $q$  (сверху вниз:  $q = 1, q = 0.5, q = 0.1$ )

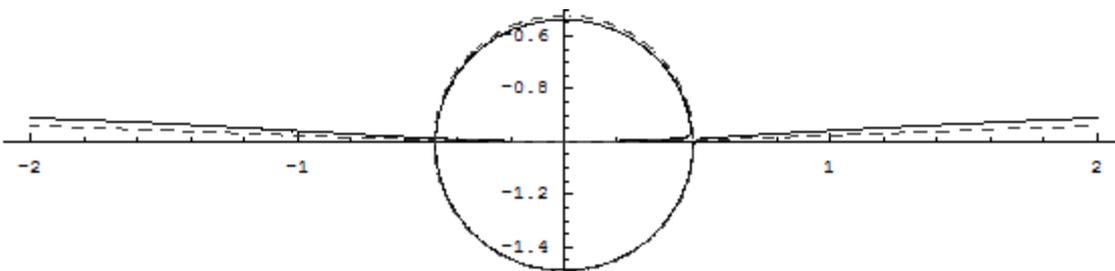
Итак, при моделировании обтекаемого тела источником свободную поверхность можно заменить твердой стенкой, если выполнены условия  $q \leq 1$  и  $E \geq 3$ . Необходимо также отметить, что в данной задаче поток со свободной поверхностью нельзя заменять безграничным ни при каких значениях  $q$  и  $E$ .



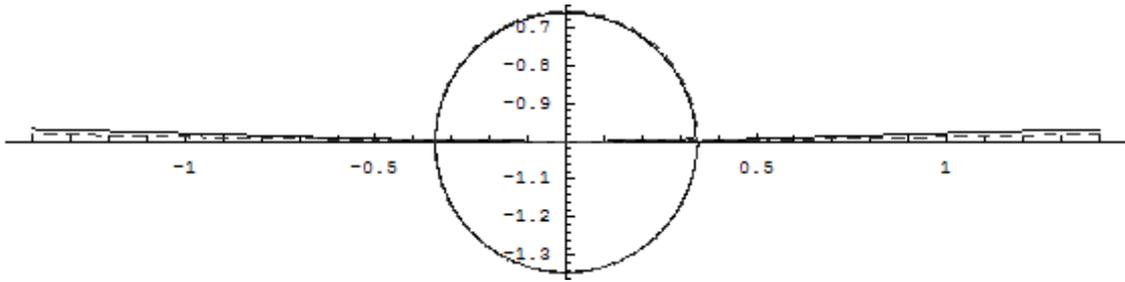
а)  $r = 0.9$



б)  $r = 0.75$

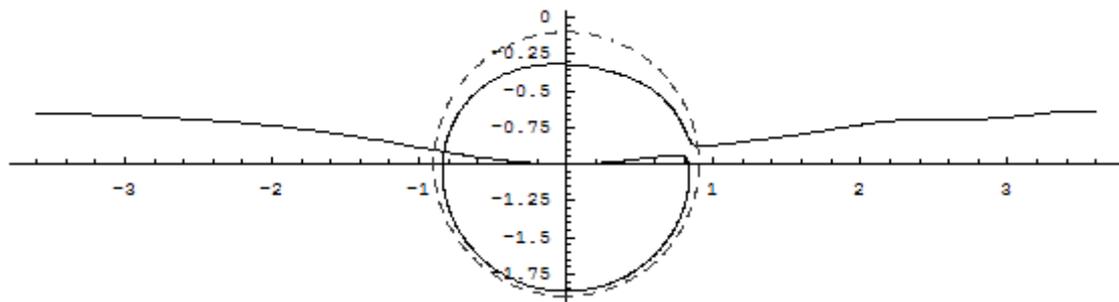


в)  $r = 0.5$

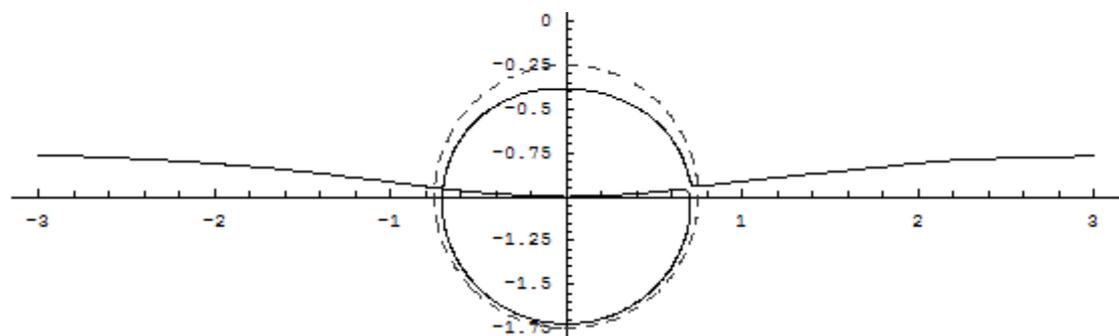


г)  $r = 0.35$

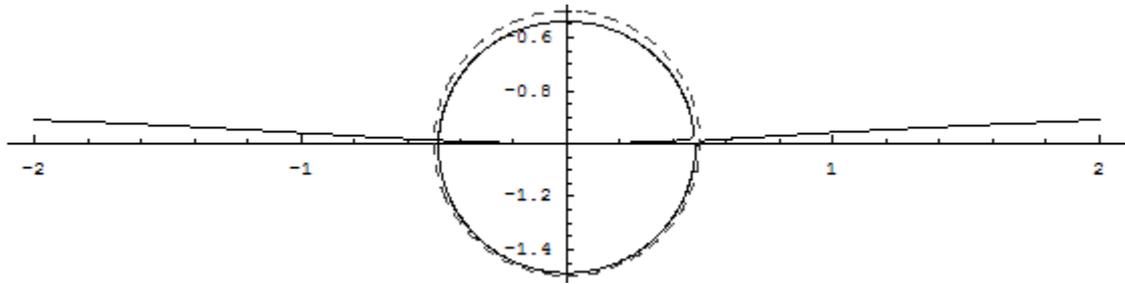
Рис. 6. Диполь под свободной поверхностью при различных значениях  $r$ ,  $E = 5$  (пунктиром — диполь у стенки)



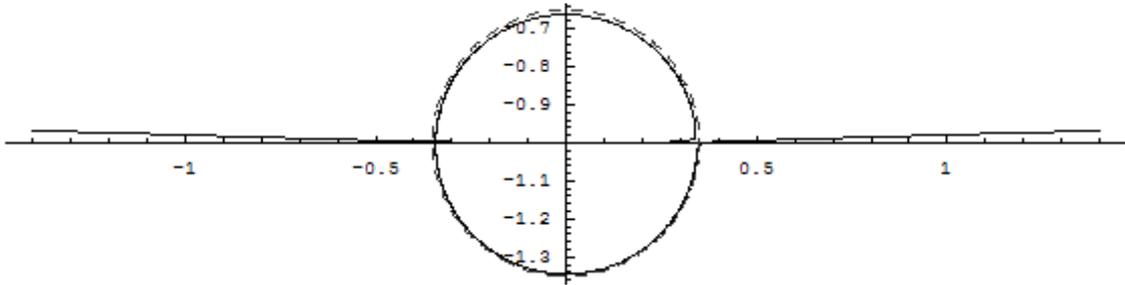
а)  $r = 0.9$



б)  $r = 0.75$



в)  $r = 0.5$



г)  $r = 0.35$

Рис. 7. Диполь под свободной поверхностью при различных значениях  $r$ ,  $E = 5$  (пунктиром — диполь в безграничном потоке)

В задаче об обтекании диполя потоком со свободной поверхностью проведенные вычисления показывают, что последнюю можно заменить твердой стенкой при выполнении условий  $r \leq 0.35, E \geq 5$ . Для примера на рис. 6 сплошными линиями показано изменение формы тела, соответствующего диполю с моментом  $m = 2\pi r^2$  в потоке со свободной поверхностью при  $r \in \{0.9, 0.75, 0.5, 0.35\}$  и  $E = 5$  (пунктиром изображено положение тела, моделируемого тем же диполем в потоке с твердой стенкой). Различие между этими случаями становится несущественным при  $r \leq 0.35$ . Небезынтересно также отметить, что в задаче об обтекании диполя при выполнении

вышеуказанных условий поток со свободной границей можно считать безграничным. Сказанное иллюстрируется рис. 7, на котором сплошными линиями показано то же, что и на рис. 6.3.6, а пунктиром изображены контуры цилиндров радиуса  $r$ . Следовательно, если  $r \leq 0.35$  и  $E \geq 5$ , то при моделировании обтекаемого тела диполем свободную поверхность можно заменить твердой стенкой либо считать поток безграничным.

Таким образом, полученные результаты, показывают, что источник в потоке у твердой стенки моделирует полубесконечное затупленное тело, несимметричное относительно горизонта его локализации. При малых значениях мощности  $q$  далеко вниз по потоку это тело смещено вниз примерно на четверть своей толщины по сравнению с телом, соответствующим обтеканию источника безграничным потоком. При уменьшении  $q$  параметр относительного смещения  $\Delta y_D$  не стремится к нулю, поэтому в задаче об отыскании формы тела, обтекание которого моделируется источником у стенки, наличием последней нельзя пренебрегать (т.е. считать поток безграничным) ни при каких значениях параметра  $q$ . Диполь с моментом  $m$  в потоке под твердой крышкой моделирует цилиндрическое тело. С убыванием параметра  $r = \sqrt{m/(2\pi)}$  относительное искажение формы этого тела по сравнению с круговым цилиндром радиуса  $r$ , отвечающим обтеканию того же диполя безграничным потоком, уменьшается, становясь незначительным при  $r = 0.35$ . Поэтому при моделировании обтекаемого у стенки тела диполем ее присутствие можно не учитывать при  $r \leq 0.35$ , тем самым считая поток

безграничным. Источник в потоке со свободной границей моделирует несимметричное затупленное тело с гофрированной поверхностью. Отношение  $a_D$  амплитуды волны на верхней части этой поверхности к толщине тела становится меньше 0.01, если  $q \leq 1$  и  $E \geq 3$ , поэтому при моделировании обтекаемого тела источником свободную поверхность можно заменить твердой стенкой при выполнении условий  $q \leq 1$  и  $E \geq 3$ . Однако поток со свободной поверхностью нельзя заменять безграничным ни при каких значениях  $q$  и  $E$ . Если  $r \leq 0.35$  и  $E \geq 5$ , то при моделировании обтекаемого тела диполем свободную поверхность можно заменить твердой стенкой либо считать поток безграничным.



**4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРИ  
ОБТЕКАНИИ ИСТОЧНИКОВ ДВУХСЛОЙНЫМ ПОТОКОМ  
КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**



В предыдущих разделах исследовался механизм генерации поверхностных волн, возникающих при обтекании подводных препятствий вблизи скачка плотности в условии бесконечной глубины, и было показано, что амплитуды поверхностных волн зависят от мощности скачка плотности, глубины его погружения и относительной локализации препятствия в окрестности самого скачка плотности. В настоящем разделе исследуется подобная задача в модельном океане конечной глубины, и ее результаты сравниваются с результатами, полученными в предыдущих разделах.

Рассматривается двухслойный поток идеальной жидкости, ограниченный горизонтальным дном, стационарно обтекающий точечный диполь с моментом  $m$ . Обозначим толщину верхнего слоя  $H$ , нижнего —  $H_1$ , а плотности соответственно  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ). Требуется определить волновую часть возмущений свободной поверхности, распространяющихся вниз по потоку. Начало координат поместим на невозмущенной границе между слоями жидкости, ось  $x$  направим вдоль этой границы, а ось  $y$  вертикально вверх. Препятствие локализовано либо под границей раздела двух слоев (рис. 1), либо над ней (рис. 5) на оси  $y$ . Решение обеих задач проводим в рамках теории малых возмущений.

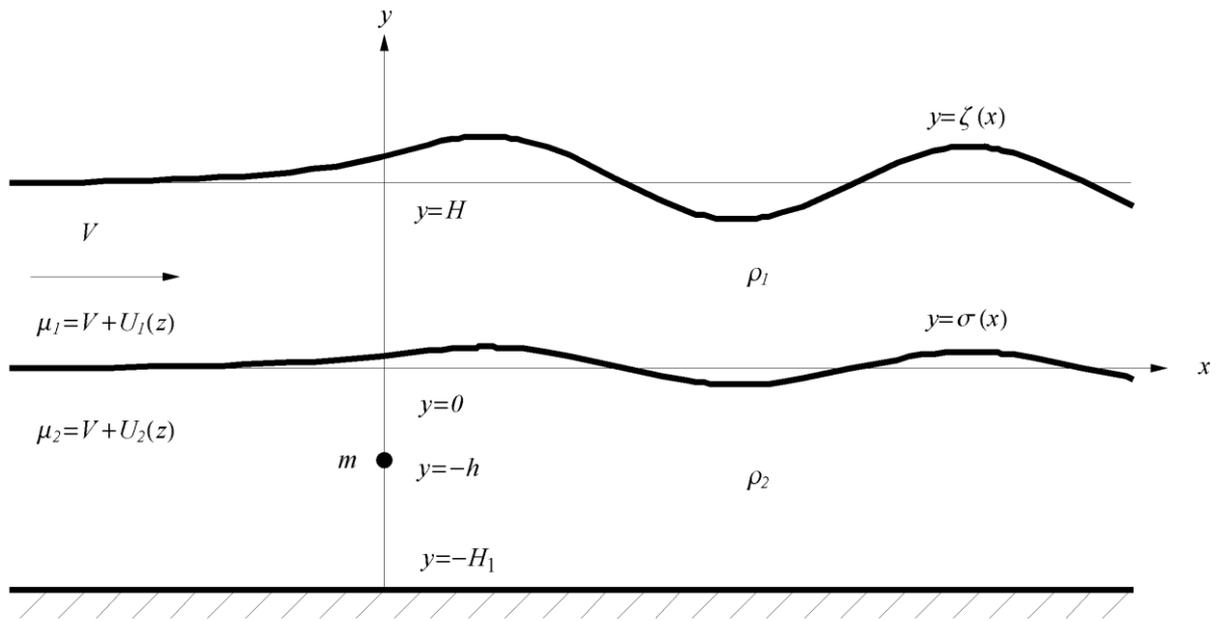


Рис. 1. Обтекание диполя, локализованного в нижнем слое двухслойного потока

Препятствие в нижнем слое. Вначале рассмотрим случай, когда диполь находится под скачком плотности, т.е. в точке  $(0, -h)$ . Пусть скорость установившегося потока при  $x \rightarrow -\infty$  равна  $V$ . Предполагая течение потенциальным, представим комплексно-сопряженную скорость в каждом из слоев в виде  $\mu_k = V + U_k$ ,  $U_k = u_k - iv_k$ ,  $(k = \{1, 2\})$ . Обозначим отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного положения  $y = H$  через  $\zeta(x)$ , а величину возвышения границы раздела слоев потока через  $\sigma(x)$ . Поскольку вдоль линии тока  $y = H + \zeta(x)$  вектор скорости произвольной частицы жидкости коллинеарен ее касательной, то

$$\zeta'(x) = \frac{v_1}{V + u_1} \Big|_{y=H+\zeta(x)}.$$

Линеаризуя данное условие и перенося его со свободной поверхности на прямую  $y = H$ , имеем кинематическое граничное условие

$$v_1 = V\zeta'(x) \text{ при } y = H. \quad (1)$$

Аналогично получаем линеаризованное кинематическое условие вдоль поверхности раздела слоев

$$v_1 = V\sigma'(x), v_2 = V\sigma'(x) \text{ при } y = 0. \quad (2)$$

Отсюда имеем одно условие для вертикальных компонент скорости:

$$v_1 = v_2 \text{ при } y = 0. \quad (3)$$

Так как возмущения от диполя затухают вверх по потоку, то интеграл Бернулли вдоль линии тока  $y = H + \zeta(x)$  можно записать следующим образом:

$$\frac{|\mu_1^2|}{2} + \frac{p_0(x)}{\rho_1} + g(H + \zeta(x)) = \frac{V^2}{2} + \frac{p_0^{(\infty)}}{\rho_1} + gH$$

где  $p_0(x)$  — давление вдоль свободной поверхности,  $p_0^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_0(x)$ ,  $g$  — ускорение свободного падения. Считая давление постоянным вдоль всей свободной поверхности, получаем динамическое условие на границе верхнего слоя:

$$\zeta(x) = \frac{V^2 - |\mu_1|^2}{2g} \Big|_{y=H+\zeta(x)},$$

которое посредством линеаризации преобразуется к виду

$$\zeta(x) = -\frac{V}{g} u_1 \text{ при } y = H. \quad (4)$$

Продифференцируем равенство (4) по  $x$  и из получившегося соотношения исключим величину  $\zeta'(x)$  с помощью формулы (1). В результате придем к граничному условию для компонент вектора скорости:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + v v_1 = 0 \text{ при } y = H, \quad v = \frac{g}{V^2}. \quad (5)$$

Интегралы Бернулли, записанные для линий тока на верхней и нижней сторонах поверхности раздела слоев  $y = \sigma(x)$ , выглядят следующим образом:

$$p_1(x) + \frac{\rho_1}{2} |\mu_1^2| + \rho_1 g \sigma(x) = p_1^{(\infty)} + \frac{\rho_1}{2} V^2 \text{ при } y = \sigma(x),$$

$$p_2(x) + \frac{\rho_2}{2} |\mu_2^2| + \rho_2 g \sigma(x) = p_2^{(\infty)} + \frac{\rho_2}{2} V^2 \text{ при } y = \sigma(x),$$

где  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$  — давления вдоль соответствующих сторон этой поверхности,

$p_1^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_1(x)$ ,  $p_2^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_2(x)$ . Поскольку при переходе через поверхность

разрыва касательных скоростей давление непрерывно, то  $p_1(x) = p_2(x)$ ,  $p_1^{(\infty)} = p_2^{(\infty)}$

и два предыдущих равенства могут быть приведены к одному условию для компонент скорости:

$$\frac{\rho_1}{2} (2Vu_1 + u_1^2 + v_1^2) + \rho_1 g \sigma(x) = \frac{\rho_2}{2} (2Vu_2 + u_2^2 + v_2^2) + \rho_2 g \sigma(x) \text{ при } y = \sigma(x).$$

Пренебрегая в последнем соотношении квадратами малых величин  $u_k$  и  $v_k$  ( $k = \{1, 2\}$ ) и перенося его на невозмущенное положение скачка плотности, получаем линеаризованное динамическое условие на границе раздела слоев:

$$\rho_1 (Vu_1 + g\sigma(x)) = \rho_2 (Vu_2 + g\sigma(x)) \text{ при } y = 0.$$

Продифференцируем обе его части по  $x$  и в полученное равенство подставим выражения для величины  $\sigma'(x)$ , следующие из формул (2). В результате приходим к граничному условию для возмущений скорости на слое скачка плотности, не содержащему неизвестной функции  $\sigma(x)$ :

$$\rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu v_1 \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \nu v_2 \right) \text{ при } y = 0. \quad (6)$$

Кроме того, на дне бассейна должно быть выполнено условие непротекания

$$v_2 = 0 \text{ при } y = -H_1. \quad (7)$$

Перепишем соотношения (6.4.5), (6.4.6), (6.4.3), (6.4.7) соответственно в терминах возмущений комплексно-сопряженной скорости:

$$\text{Im} \left[ i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = 0 \text{ при } y = H, \quad (8)$$

$$\delta \text{Im} \left[ i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = \text{Im} \left[ i \frac{dU_2}{dz} - \nu U_2 \right] \text{ при } y = 0, \quad (9)$$

$$\text{Im} U_1 = \text{Im} U_2 \text{ при } y = 0, \quad (10)$$

$$\text{Im} U_2 = 0 \text{ при } y = -H_1, \quad (11)$$

где  $\delta = \rho_1/\rho_2$ ,  $z = x + iy$ . Таким образом, исходная задача сведена к отысканию функций  $U_1(z)$  и  $U_2(z)$ , удовлетворяющих граничным условиям (8)–(11), причем  $U_1(z)$  регулярна в полосе  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 < y < H$ , а  $U_2(z)$  — в полосе  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-H_1 < y < 0$  всюду за исключением точки  $z = -ih$ , в которой она имеет полюс второго порядка (так как в этой точке расположен диполь). Возмущение свободной поверхности по отношению к ее равновесному положению вычисляется с помощью динамического условия на границе верхнего слоя (4).

В соответствии с вышесказанным будем искать комплексно-сопряженную скорость  $U_1(z)$  в виде ее разложения в интеграл Фурье по волновым числам, а  $U_2(z)$  как сумму комплексно-сопряженной скорости, индуцированной диполем в безграничном потоке, и регулярной функции, представленной интегралом Фурье:

$$U_1 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(k)e^{ikz} + B(k)e^{-ikz}] dk, \quad (12)$$

$$U_2 = \frac{m}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(z + ih)^2} + \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk \right]. \quad (13)$$

Применив равенство

$$-\frac{1}{(z + ih)^2} = \begin{cases} \int_0^{\infty} ke^{-kh} e^{ikz} dk, & \text{если } y > -h, \\ \int_0^{\infty} ke^{kh} e^{-ikz} dk, & \text{если } y < -h, \end{cases}$$

получим из (13) выражение для функции  $U_2(z)$  в областях нижнего слоя, находящихся над и под точкой локализации диполя соответственно:

$$U_2(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [(ke^{-kh} + C(k))e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk, & \text{если } y > -h, \\ \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + (ke^{kh} + D(k))e^{-ikz}] dk, & \text{если } y < -h. \end{cases} \quad (14)$$

Подставив формулы (12) и (14) для комплексно-сопряженных скоростей  $U_1(z)$  и  $U_2(z)$  в граничные условия (8)–(11), перепишем последние в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} [k(A(k)e^{-kH} + B(k)e^{kH}) + \nu(A(k)e^{-kH} - B(k)e^{kH})] \sin kx dk = 0 \\ \int_0^{\infty} [\delta\{k(A(k) + B(k)) + \nu(A(k) - B(k))\} - k(ke^{-kh} + C(k) + D(k)) - \\ \quad - \nu(ke^{-kh} + C(k) - D(k))] \sin kx dk = 0 \\ \int_0^{\infty} [A(k) - B(k) - ke^{-kh} - C(k) + D(k)] \sin kx dk = 0 \\ \int_0^{\infty} [C(k)e^{kH_1} - (ke^{kh} + D(k))e^{-kH_1}] \sin kx dk = 0 \end{array} \right.$$

Выполнение этих равенств эквивалентно одновременному обращению в нуль сомножителей в подынтегральных выражениях, стоящих в квадратных скобках перед  $\sin kx$ . Отсюда имеем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных функций  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$ ,  $D(k)$ :

$$\left\{ \begin{array}{llll} (k + \nu)e^{-kH} A & + (k - \nu)e^{kH} B & & = 0 \\ \delta(k + \nu)A & + \delta(k - \nu)B & - (k + \nu)C & - (k - \nu)D = k(k + \nu)e^{-kh} \\ A & - B & - C & + D = ke^{-kh} \\ & & e^{kH_1}C & - e^{-kH_1}D = ke^{k(h-H_1)} \end{array} \right.$$

Решая ее, получаем следующие выражения для  $A(k)$  и  $B(k)$ :

$$\begin{aligned}
 A(k) &= \left\{ 2k^2(k-\nu)e^{kH} \operatorname{ch} k(H_1-h) \right\} \left\{ (1-\delta)(k^2-\nu^2) \times \right. \\
 &\times \operatorname{ch} k(H-H_1) + \left. \left[ (1+\delta)k^2 + (1-\delta)\nu^2 \right] \operatorname{ch} k(H_1+H) - \right. \\
 &\left. - 2k\nu \operatorname{sh} k(H_1+H) \right\}, \\
 B(k) &= \left\{ -2k^2(k+\nu)e^{-kH} \operatorname{ch} k(H_1-h) \right\} \left\{ (1-\delta)(k^2-\nu^2) \times \right. \\
 &\times \operatorname{ch} k(H-H_1) + \left. \left[ (1+\delta)k^2 + (1-\delta)\nu^2 \right] \operatorname{ch} k(H_1+H) - \right. \\
 &\left. - 2k\nu \operatorname{sh} k(H_1+H) \right\},
 \end{aligned}$$

Подставив последние в соотношения (12) и (4) и воспользовавшись формулами для суммы и разности гиперболических функций, приходим к следующему интегральному представлению искомой величины возвышения свободной поверхности:

$$\begin{aligned}
 \zeta(x) &= \frac{m}{\pi V} \int_0^\infty \frac{k^2 \operatorname{ch} k(H_1-h)}{\operatorname{ch} kH \operatorname{ch} kH_1} \times \\
 &\times \frac{\cos kx dk}{k^2 + \left[ \delta k^2 + (1-\delta)\nu^2 \right] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)}.
 \end{aligned}$$

Выбрав в качестве характерного вертикального масштаба толщину верхнего слоя  $H$ , а в качестве горизонтального — величину  $\nu^{-1} = V^2/g$ , перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned}
 X = \nu x, Z = \frac{\zeta}{H}, \xi = \frac{k}{\nu}, M = \frac{m}{VH^2}, E = \nu H = \frac{gH}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}^2}, \\
 E_1 = \nu H_1 = \frac{gH_1}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}_1^2}, E_0 = \nu h = \frac{gh}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}_0^2},
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_0$  — числа Фруда соответственно по глубине верхнего слоя, глубине нижнего слоя и расстоянию от диполя до невозмущенной поверхности раздела.

В переменных (15) выражение для отклонения свободной границы запишется в виде

$$Z(X) = \frac{ME}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(E_1 - E_0)\xi}{\operatorname{ch} E\xi \operatorname{ch} E_1\xi} \times \frac{\cos X \xi d\xi}{\xi^2 + [\delta\xi^2 + (1 - \delta)] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi)}. \quad (16)$$

Асимптотическое положение свободной поверхности далеко вниз по потоку (при  $X \rightarrow \infty$ ) определяется неотрицательными нулями знаменателя подынтегрального выражения в (16), т. е. неотрицательными корнями уравнения

$$\xi^2 + [\delta\xi^2 + (1 - \delta)] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi) = 0.$$

Введем в рассмотрение параметр  $\varepsilon = 1 - \delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$ , обозначающий относительный перепад плотности, (по условию  $0 < \varepsilon < 1$ ) и перепишем это уравнение в виде

$$f(\xi, E_1, E_2) = \varepsilon, \text{ где } f(\xi, E_1, E_2) = \frac{\xi^2(1 + \operatorname{th} E_1\xi \operatorname{th} E_2\xi) - \xi(\operatorname{th} E_1\xi + \operatorname{th} E_2\xi)}{(\xi^2 - 1) \operatorname{th} E_1\xi \operatorname{th} E_2\xi}. \quad (17)$$

Введем следующие обозначения:  $f_0(E_1, E_2) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi, E_1, E_2)$ ,

$$f_1(E_1, E_2) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial f(\xi, E_1, E_2)}{\partial \xi}, \quad f_2(E_1, E_2) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f(\xi, E_1, E_2)}{\partial \xi^2}. \text{ Проведя соответствующие}$$

преобразования, можно убедиться в справедливости равенств

$$f_0(E_1, E_2) = \frac{E_1 + E_2 - 1}{E_1 E_2}; \quad f_2(E_1, E_2) = \frac{2(E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2) - 2(E_1^2 + 3E_1 E_2 + E_2^2) + 6(E_1 + E_2 - 1)}{3E_1 E_2};$$

из четности функции  $f$  по переменной  $\xi$  имеем  $f_1(E_1, E_2) \equiv 0$ .

Далее, как показывают численные эксперименты относительно поведения функции  $f(\xi, E_1, E_2)$ , имеет место утверждение: а) если  $f_2(E_1, E_2) \leq 0$ , то  $f(\xi, E_1, E_2)$  монотонно убывает по  $\xi$  на полуинтервале  $[0; 1)$ ; б) если  $f_2(E_1, E_2) > 0$ , то  $f(\xi, E_1, E_2)$  имеет единственный максимум в точке  $\xi_0(E_1, E_2) \in (0; 1)$ , т.е. функция  $f(\xi, E_1, E_2)$  возрастает при  $\xi \in [0; \xi_0]$  и убывает при  $\xi \in [\xi_0; 1)$ . Кроме того, очевидно  $\lim_{\xi \rightarrow 1^-} f(\xi, E_1, E_2) = -\infty$ . Следовательно, поведение функции  $f(\xi, E_1, E_2)$  на полуинтервале  $[0; 1)$  определяется знаком ее второй производной при  $\xi = 0$ , и уравнение (17) может иметь не более двух корней на интервале  $(0; 1)$ .

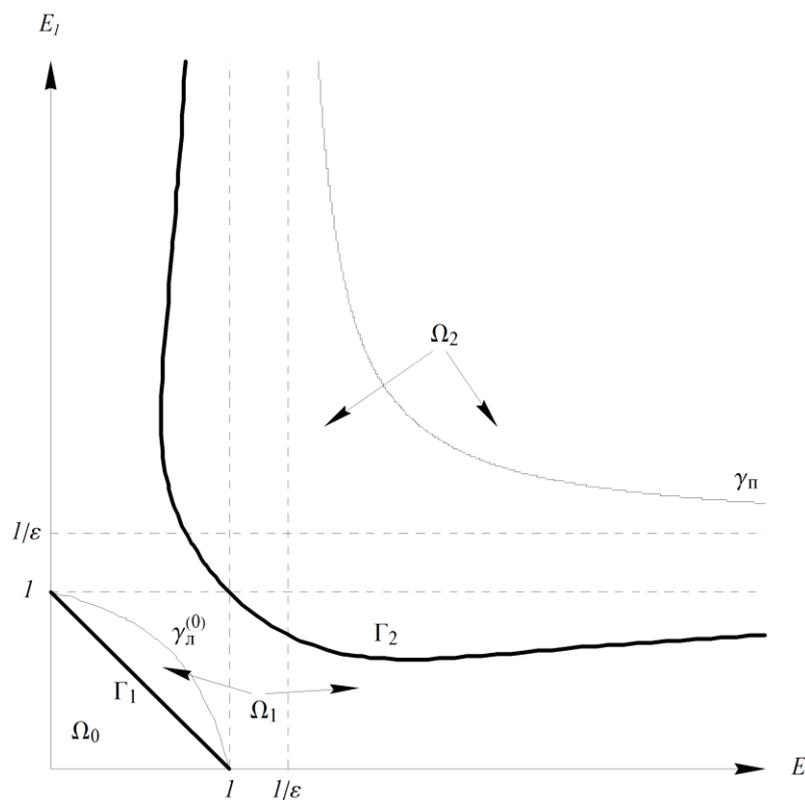


Рис. 2. Кривые и области, рассматриваемые на плоскости параметров  $E, E_1$

На рис. 2 на плоскости параметров  $E, E_1$  изображена кривая  $\Gamma_2$ , определяемая уравнением  $f_2(E, E_1) = 0$ . Она имеет горизонтальную и

вертикальную асимптоту  $E_1=1$  и  $E=1$  (т. е. на  $\Gamma_2$   $\lim_{E_1 \rightarrow 1^-} E = \infty$ ,  $\lim_{E \rightarrow 1^-} E_1 = \infty$ ). Кривая  $\Gamma_2$  симметрична относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов и проходит через точку  $(1;1)$ , поэтому в этой точке она пересекает биссектрису под прямым углом, а прямая  $E+E_1=2$ , перпендикулярная упомянутой биссектрисе и также проходящая через точку  $(1;1)$ , является касательной к  $\Gamma_2$ . Уравнение  $f_0(E, E_1)=0$  задает в первом квадранте отрезок  $\Gamma_1$ , соединяющий точки  $(1;0)$  и  $(0;1)$ . Кривая  $\Gamma_2$  и отрезок  $\Gamma_1$  разбивают первую четверть на три области. В области  $\Omega_2$ , расположенной над  $\Gamma_2$ , выполнены неравенства  $f_2(E, E_1) > 0$  и  $f_0(E, E_1) > 0$ , в области  $\Omega_1$ , находящейся между  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_1$  —  $f_2(E, E_1) < 0$ ,  $f_0(E, E_1) > 0$  и, наконец в области  $\Omega_0$ , являющейся внутренностью треугольника с вершинами в точках  $(0;0)$ ,  $(1;0)$ ,  $(0;1)$  —  $f_2(E, E_1) < 0$ ,  $f_0(E, E_1) < 0$ .

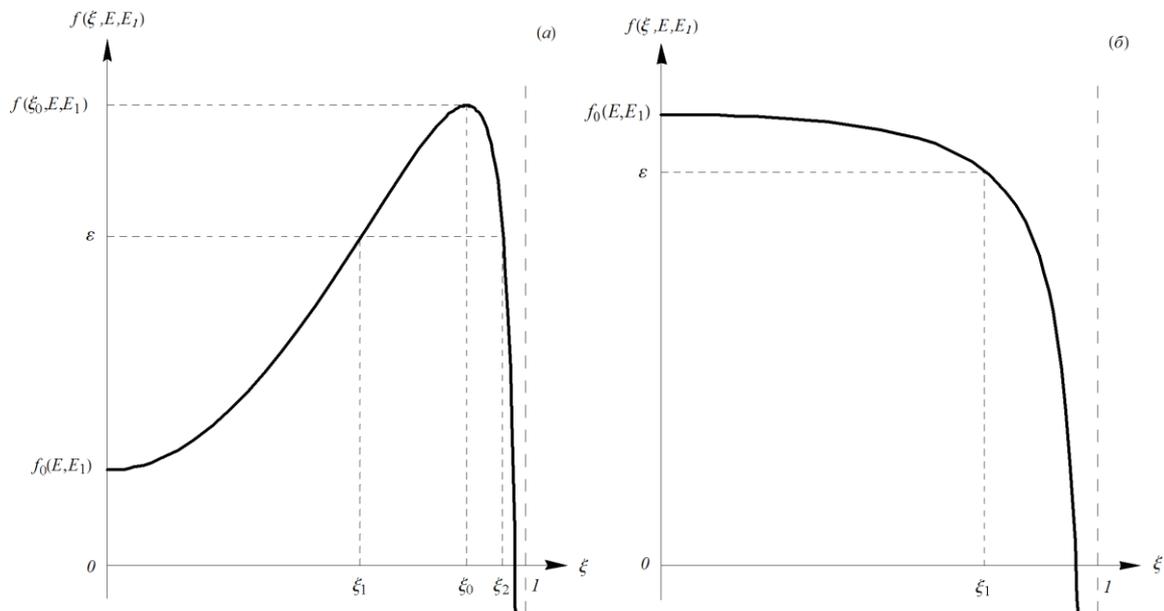


Рис. 3. Два качественно различных варианта поведения функции

$f(\xi, E, E_1)$  на интервале  $(0;1)$

Исследуем теперь вопрос о количестве корней уравнения (17) на интервале  $(0;1)$  в зависимости от значений параметров  $E, E_1$  и  $\varepsilon$  ( $E > 0, E_1 > 0, 0 < \varepsilon < 1$ ). Вначале сформулируем критерии существования двух корней. Из графических соображений (см. рис. 3(a)) ясно, что этот случай реализуется тогда и только тогда, когда функция  $f(\xi, E, E_1)$  (рассматриваемая как функция переменной  $\xi$ ) имеет локальный максимум в точке  $\xi_0 \in (0;1)$  и значение параметра  $\varepsilon$  лежит внутри интервала  $(f_0(E, E_1), f(\xi_0, E, E_1))$ , т. е.

$$\begin{cases} f_2(E, E_1) > 0, \\ f_0(E, E_1) < \varepsilon < \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E, E_1). \end{cases}$$

Вопрос о наличии у уравнения (17) хотя бы одного корня на интервале  $(0;1)$  решается положительно в каждом из следующих двух случаев.

I. Функция  $f(\xi, E, E_1)$  имеет максимум в точке  $\xi_0 \in (0;1)$  и величина  $\varepsilon$  не превосходит этот максимум (рис. 3(a)), что равносильно выполнению следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} f_2(E, E_1) > 0 \\ \varepsilon \leq \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E, E_1). \end{cases}$$

II. Функция  $f(\xi, E, E_1)$  монотонно убывает на интервале  $(0;1)$  и  $\varepsilon < \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E, E_1) = f_0(E, E_1)$  (рис. 3(б)), т. е.

$$\begin{cases} f_2(E, E_1) \leq 0, \\ \varepsilon < f_0(E, E_1). \end{cases}$$

Для визуализации полученных критериев на плоскости  $(E; E_1)$  сделаем ряд вспомогательных утверждений. Во-первых, нетрудно убедиться, что уравнение  $f_0(E, E_1) = \varepsilon$  определяет гиперболу  $\gamma$  с асимптотами  $E = 1/\varepsilon$  и  $E_1 = 1/\varepsilon$ . Отсюда сразу же следует, что ее правая ветвь  $\gamma_{\text{п}}$  целиком расположена в области  $\Omega_2$ , поскольку, как показано выше, граница  $\partial\Omega_2 = \Gamma$  лежит вне области

$$\begin{cases} E > 1, \\ E_1 > 1. \end{cases}$$

Отметим также, что неравенство  $f_0(E, E_1) > \varepsilon$  задает область между ветвями гиперболы  $\gamma$ , а неравенством  $f_0(E, E_1) < \varepsilon$  определяются области над ее правой ( $\gamma_{\text{п}}$ ) и под левой ( $\gamma_{\text{л}}$ ) ветвями.

Во-вторых в силу симметрии  $\gamma$  относительно прямой  $E = E_1$ , являющейся биссектрисой первого и третьего координатных углов, эта прямая пересекает левую ветвь  $\gamma$  под прямым углом. Абсцисса  $E_0$  точки пересечения находится из уравнения  $\varepsilon E_0^2 - 2E_0 + 1 = 0$ :

$$E_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}.$$

Очевидно, что  $E_0 < 1$ , поэтому прямая  $E + E_1 = 2E_0$ , касательная к левой ветви гиперболы  $\gamma$  и параллельная касательной к кривой  $\Gamma$   $E + E_1 = 2$ , расположена ниже этой касательной. Отсюда следует, что  $\gamma_{\text{л}}$  лежит вне области  $\Omega_2$  (и не пересекается с ее границей). Обозначим через  $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$  часть  $\gamma_{\text{л}}$ , находящуюся в первом квадранте. Легко видеть, что  $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$  расположена над

прямой  $E + E_1 = 1$ , поскольку  $\gamma_n$  выпукла вверх и проходит через точки (1;0) и (0;1), принадлежащие этой прямой. Таким образом кривая  $\gamma_n^{(0)}$  лежит в области  $\Omega_1$ .

В-третьих, покажем, что при наличии на интервале (0;1) у функции  $f(\xi, E, E_1)$  локального максимума  $\xi_0$  справедливо неравенство  $f(\xi_0, E, E_1) \geq 1$ . С этой целью рассмотрим уравнение  $f(\xi, E, E_1) = 1$  или

$$\xi^2 - (\text{th } E\xi + \text{th } E_1\xi)\xi + \text{th } E\xi \text{th } E_1\xi = 0.$$

Решая его как квадратное относительно  $\xi$  (с коэффициентами, зависящими от  $\text{th } E\xi$  и  $\text{th } E_1\xi$ ), находим, что оно равносильно совокупности

$$\begin{cases} \text{th } E\xi = \xi, \\ \text{th } E_1\xi = \xi, \end{cases} \quad (6.4.18)$$

которая имеет хотя бы одно положительное решение, если

$$\begin{cases} E > 1, \\ E_1 > 1, \end{cases} \quad (6.4.19)$$

поскольку уравнение  $\text{th } ax = x$  имеет положительный корень при выполнении условия  $(\text{th } ax)|_{x=0} > 1$ , т. е. при  $a > 1$ . Заметим, что в силу неравенства  $\text{th } E\xi < 1$ , справедливого при любых вещественных значениях  $\xi$ , все положительные решения рассматриваемой совокупности (если они существуют) лежат на интервале (0;1). Далее, так как область  $\Omega_2$  лежит внутри области, задаваемой неравенствами (19), то отсюда получаем, что в случае наличия у функции

$f(\xi, E, E_1)$  локального максимума на интервале  $(0;1)$  его величина не меньше единицы.

Докажем, наконец, что уравнение (17) не имеет действительных корней  $\xi$  таких, что  $\xi > 1$ . Имеем:  $\lim_{\xi \rightarrow 1^+} f(\xi, E, E_1) = +\infty$ . С другой стороны, воспользовавшись предельными соотношениями  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \text{th } E\xi = 1$  и  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \text{th } E_1\xi = 1$ , нетрудно убедиться в справедливости равенства  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi, E, E_1) = 2$ . Выше было установлено, что уравнение  $f(\xi, E, E_1) = 1$  равносильно совокупности (18), все положительные решения которой лежат на интервале  $(0;1)$ . Следовательно, это уравнение не имеет корней при  $\xi > 1$ , а поскольку функция  $f(\xi, E, E_1)$  непрерывна по  $\xi$  на множестве  $(1; +\infty)$ , то отсюда заключаем, что при  $\xi > 1$  выполняется неравенство  $f(\xi, E, E_1) > 1$  и уравнение (17) не имеет корней  $\xi \in (1; +\infty)$ .

Таким образом показано, что

- 1) Правая ветвь гиперболы  $\gamma$  лежит в области  $\Omega_2$ .
- 2) Часть левой ветви гиперболы  $\gamma$ , находящаяся в первой четверти, расположена вне области  $\Omega_2$ .
- 3)  $\max_{0 < \xi < 1} f(\xi, E, E_1) \geq 1$  при условии, что точка с координатами  $(E; E_1)$  лежит в области  $\Omega_2$ .
- 4) Все положительные корни уравнения (6.4.17) удовлетворяют неравенству  $0 < \xi < 1$ .

С учетом полученных утверждений критерий наличия у уравнения (17) двух положительных корней можно привести к виду

$$\begin{cases} E + E_1 - 1 < \varepsilon E E_1, \\ E > 1/\varepsilon, E_1 > 1/\varepsilon. \end{cases} \quad (20)$$

Эта система задает внутренность правой ветви гиперболы  $\gamma$ . Условия существования у (17) хотя бы одного положительного решения переписываются следующим образом

$$\begin{cases} E + E_1 - 1 > \varepsilon E E_1, \\ E > 1/\varepsilon, E_1 > 1/\varepsilon \end{cases} \quad (21)$$

и определяют область в первом квадранте, расположенную над объединением кривой  $\gamma_n^{(0)}$  (т. е. находящейся в нем части левой ветви гиперболы  $\gamma$ ) и луча  $[1; +\infty)$  на оси абсцисс.

Обозначим теперь через  $\beta$  отношение толщины нижнего слоя жидкости к толщине верхнего:  $\beta = H_1/H$ . Из формул (15) вытекает, что  $\beta = E_1/E$ . Подставляя  $\beta E$  вместо  $E_1$  в условия (20–21) и решая получившиеся неравенства относительно  $E$ , находим, что уравнение (17) имеет два положительных корня при

$$E > E_{cr}^{вн.} = \frac{\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2\varepsilon\beta} \quad (22)$$

и хотя бы одно положительное решение при

$$E > E_{cr}^{пов.} = \frac{\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2\varepsilon\beta}. \quad (23)$$

Отсюда очевидно, что  $E_{cr}^{вн.} > E_{cr}^{пов.}$ . Заметим, что с физической точки зрения поиск корней уравнения (6.4.17) эквивалентен отысканию таких волн, фазовая скорость которых равна скорости набегающего потока  $V$ . Поэтому данные волны являются стационарными, что и требуется по условию задачи.

Вне левой полуплоскости помимо полюсов на положительной действительной оси подынтегральная функция в (16) имеет также бесконечное множество полюсов, расположенных на мнимой оси. В самом деле, подстановка  $\xi = i\eta$  ( $\eta \in R$ ) в (17) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} &(-\cos E\eta \cos E_1\eta + (1 - \varepsilon) \sin E\eta \sin E_1\eta)\eta^2 + \\ &+ \sin(E + E_1)\eta \cdot \eta - \varepsilon \sin E\eta \sin E_1\eta = 0, \end{aligned}$$

имеющему счетное множество действительных решений при любом значении отношения  $\beta = E_1/E$ .

Вернемся к формуле (16) для величины возвышения свободной поверхности. Воспользовавшись тождеством  $\cos X\xi = (e^{iX\xi} + e^{-iX\xi})/2$ , представим (16) в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z(X) &= \lim_{M_1 \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \int_0^{M_1} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{M_1} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi \right) = \\ &= \lim_{M_1 \rightarrow +\infty} (J_1(X, M_1) + J_2(X, M_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{ME}{\pi} \times \\ &\times \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(E_1 - E_0)\xi}{\operatorname{ch} E\xi \operatorname{ch} E_1\xi \left\{ \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi) \right\}}. \end{aligned}$$

Вначале рассмотрим случай положительных  $X$  и исследуем функцию  $J_1(X, M_1)$ . Для получения решения, затухающего вверх по потоку, сместим контур интегрирования в формуле для  $J_1(X, M_1)$  в нижнюю полуплоскость, т.е. будем понимать  $J_1$  как следующий предел:

$$J_1(X, M_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} Z_1(X, M_1, \varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + M_1} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi.$$

С целью вычисления  $Z_1(X, M_1, \varepsilon_1)$  рассмотрим вспомогательный контур  $\Gamma^+$ , состоящий из отрезка  $[-i\varepsilon_1; -i\varepsilon_1 + M_1]$ , дуги  $C_R^+$  окружности радиуса  $R = \sqrt{M_1^2 + \varepsilon_1^2}$ , соединяющей точку  $-i\varepsilon_1 + M_1$  с точкой  $iR$ ,  $n$  полуокружностей  $c_j: |\xi - i\eta_j| = \varepsilon_1, \operatorname{Re} \xi \geq 0$  и системы отрезков  $d = [-i\varepsilon_1; i(\eta_1 - \varepsilon_1)]$

$\bigcup_{j=1}^{n-1} [i(\eta_j + \varepsilon_1); i(\eta_{j+1} - \varepsilon_1)] \cup [i(\eta_n + \varepsilon_1); iR]$ , соединяющих соответствующие точки этих полуокружностей, принадлежащие мнимой оси, а также отрезков  $[-i\varepsilon_1; i(\eta_1 - \varepsilon_1)]$  и  $[i(\eta_n + \varepsilon_1); iR]$  (рис. 6.4.4(a)). Здесь  $i\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) — все полюса функции  $F(\xi)$ , расположенные в верхней полуплоскости на мнимой оси и удовлетворяющие неравенству  $\eta_j < R$ . Обозначим через  $\xi_j$  действительные положительные полюса функции  $F(\xi)$ , а через  $s$  — их количество ( $0 \leq s \leq 2$ ). Поскольку внутри контура  $\Gamma^+$   $F(\xi)$  регулярна всюду за исключением особых точек  $\xi_j$ , то по основной теореме теории вычетов имеем:

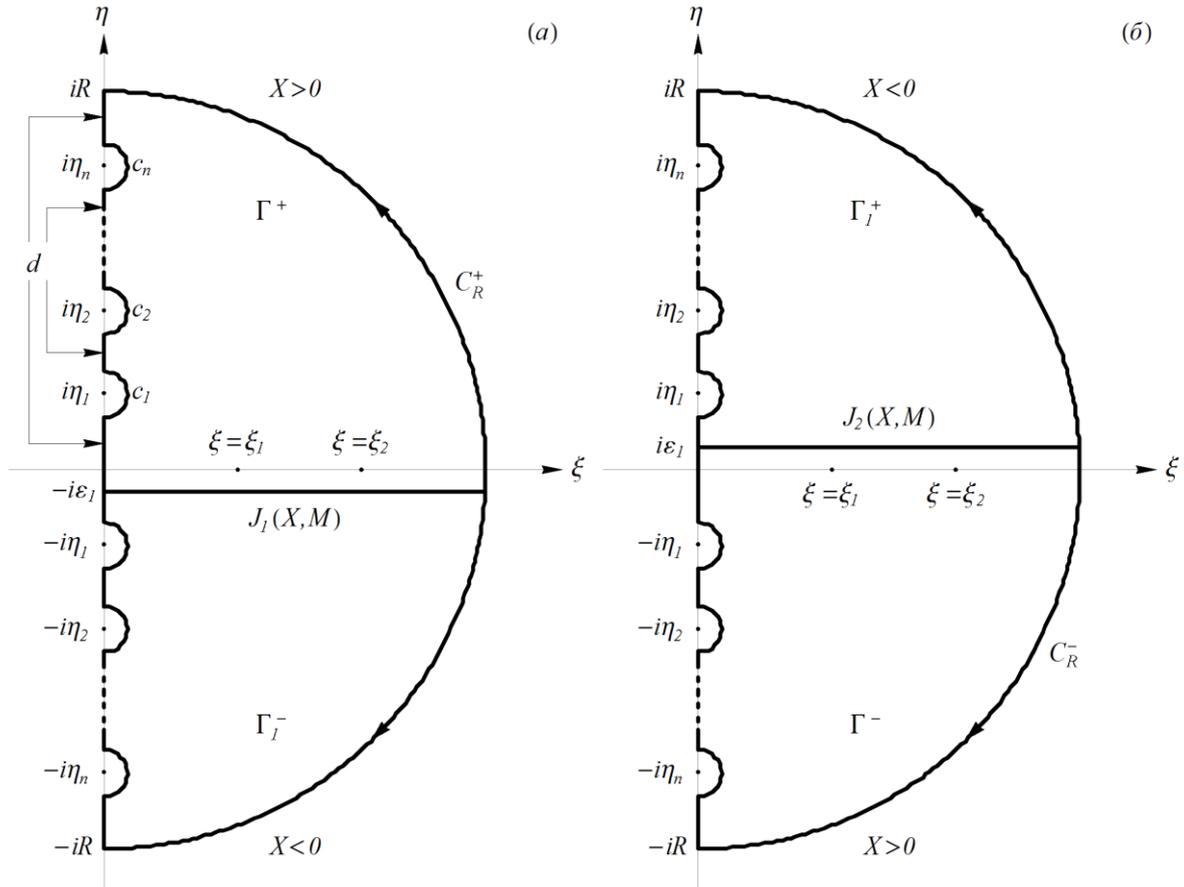


Рис. 4. Контурь интегрирования, используемые для вычисления  $J_1$  и  $J_2$

$$\int_{\Gamma^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi = 2\pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{i\xi_j X}. \quad (24)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi &= \int_{-i\epsilon_1}^{-i\epsilon_1+M_1} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \int_{C_R^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi - \\ &- \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \int_l F(i\eta) e^{-X\eta} i d\eta, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $l$  — система отрезков  $d$ , повернутая на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке относительно начала координат (т.е.  $l$  лежит на действительной оси).

Сравнивая (24) и (25), находим:

$$\begin{aligned}
Z_1(X, M_1, \varepsilon_1) = & \pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{i\xi_j X} + \frac{\pi i}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \\
& - \frac{1}{2} \int_{C_R^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_l F(i\eta) e^{-X\eta} i d\eta.
\end{aligned} \tag{26}$$

Обратимся теперь к интегралу  $J_2(X, M_1) = \frac{1}{2} \int_0^{M_1} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi$ . Сместив контур

интегрирования в верхнюю полуплоскость, будем искать  $J_2(X, M_1)$  как предел

$$J_2(X, M_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} Z_2(X, M_1, \varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1 + M_1} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi.$$

Рассматривая вспомогательный контур  $\Gamma^-$ , симметричный  $\Gamma^+$  относительно действительной оси (и ориентированный по часовой стрелке (рис. 4(б))), можно показать, что

$$\begin{aligned}
Z_2(X, M_1, \varepsilon_1) = & -\pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{-i\xi_j X} - \frac{\pi i}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=-i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \\
& - \frac{1}{2} \int_{C_R^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_l F(-i\eta) e^{-X\eta} i d\eta,
\end{aligned} \tag{27}$$

где  $C_R^-$  — дуга окружности, симметричная дуге  $C_R^+$ . Теперь сложим почленно (26) и (27) и в полученном соотношении устремим величину  $\varepsilon_1$  к нулю.

Принимая во внимание, что  $F(\xi)$  — четная функция и  $\operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) = -\operatorname{res}_{\xi=-i\eta_j} F(\xi)$

( $j=1, 2, \dots, n$ ), в результате придем к следующему равенству:

$$\begin{aligned}
J_1(X, M_1) + J_2(X, M_1) &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (Z_1(X, M_1, \varepsilon_1) + Z_2(X, M_1, \varepsilon_1)) = \\
&= -2\pi \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) \sin \xi_j X + \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{C_{M_1}^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_{C_{M_1}^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi.
\end{aligned} \tag{28}$$

Поскольку в силу леммы Жордана

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \int_{C_{M_1}^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi = 0, \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \int_{C_{M_1}^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi = 0,$$

то, переходя в (28) к пределу при  $M_1 \rightarrow \infty$ , заключаем, что при  $X > 0$

$$\begin{aligned}
Z(X) &= \lim_{M_1 \rightarrow \infty} (J_1(X, M_1) + J_2(X, M_1)) = \\
&= -2\pi \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) \sin \xi_j X + \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X}.
\end{aligned}$$

В этой формуле первое слагаемое задает волновую структуру поверхностных возмущений, а второе соответствует неволновой части возмущений свободной границы, затухающей вниз по потоку. Для вычисления волновой составляющей поверхностных возмущений  $W(X)$  введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
g_1(\xi, E, \gamma, \beta) &= \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(\beta - \gamma) E \xi}{\operatorname{ch} E \xi \operatorname{ch} \beta E \xi}, \quad g_2(\xi, \varepsilon, E, \beta) = \\
&= \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E \xi \operatorname{th} \beta E \xi - \xi (\operatorname{th} E \xi + \operatorname{th} \beta E \xi),
\end{aligned}$$

где  $\gamma = h/H = E_0/E$ . Тогда  $F(\xi) = \frac{ME}{\pi} \frac{g_1}{g_2}$ , а поскольку  $F(\xi)$  имеет в точках  $\xi = \xi_j$

полюса первого порядка, то  $\operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) = \frac{ME}{\pi} \frac{g_1(\xi_j)}{g_2'(\xi_j)}$  и

$$W(X) = -2ME \sum_{j=1}^s \frac{g_1(\xi_j)}{g_2'(\xi_j)} \sin \xi_j X. \tag{29}$$

Связывая найденное выражение для  $W(X)$  с условиями (6.4.22–6.4.23) наличия у уравнения (17) положительных решений, получаем, что при  $E > E_{cr}^{BH}$  искомые волновые возмущения представляют собой сумму двух мод — внутренней (т.е. возникающей благодаря неоднородности жидкости) и поверхностной (за счет непосредственного обтекания препятствия), причем первая соответствует меньшему корню  $\xi_1$ , а вторая — большему  $\xi_2$ . Если  $E_{cr}^{пов.} < E < E_{cr}^{BH}$ , то  $W(X)$  состоит из одной лишь поверхностной моды; при  $E < E_{cr}^{пов.}$  поверхностные волны за обтекаемым препятствием не образуются и  $W(X) \equiv 0$ .

Следовательно, внутренняя мода возникает при  $E > E_{cr}^{BH}$ , а поверхностная — при  $E > E_{cr}^{пов.}$ . Отсюда ясно, что величины  $E_{cr}^{BH}$  и  $E_{cr}^{пов.}$  суть значения параметра  $E$  при скорости набегающего потока  $V$ , равной максимально возможной фазовой скорости соответственно внутренней и поверхностной моды. А поскольку при  $E \rightarrow E_{cr}^{BH}$  или  $E \rightarrow E_{cr}^{пов.}$  один из положительных корней уравнения (17) стремится к нулю, то критические значения  $E$  отвечают фазовым скоростям длинных волн.

Для дальнейшего представляется удобным переписать полученные результаты в терминах введенного выше числа Фруда  $F$ . Так как  $E = 1/F^2$ , то из (22) и (23) следует, что внутренняя мода существует при

$$F < F_{cr}^{BH} = \sqrt{\frac{\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2}}, \quad (30)$$

а поверхностная — при

$$\mathbf{F} < \mathbf{F}_{cr}^{пов.} = \sqrt{\frac{\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2}}. \quad (31)$$

Очевидно, что  $\mathbf{F}_{cr}^{вн.} < \mathbf{F}_{cr}^{пов.}$ , т.е. поверхностная мода образуется в более широком диапазоне чисел Фруда (или, что то же самое, скоростей потока), нежели внутренняя. Волновая часть возмущений свободной границы запишется следующим образом:

$$W(X) = -2ME \sum_{j=1}^s \frac{q_1(\xi, \mathbf{F}, \gamma, \beta)}{dq_2(\xi, \varepsilon, \mathbf{F}, \beta)/d\xi} \Big|_{\xi=\xi_j} \sin \xi_j X,$$

где функции

$$q_1(\xi, \mathbf{F}, \gamma, \beta) = \frac{\xi^2 \operatorname{ch}((\beta - \gamma)\xi/\mathbf{F}^2)}{\operatorname{ch}(\xi/\mathbf{F}^2) \operatorname{ch}(\beta\xi/\mathbf{F}^2)} \text{ и } q_2(\xi, \varepsilon, \mathbf{F}, \beta) = \\ = \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th}(\xi/\mathbf{F}^2) \operatorname{th}(\beta\xi/\mathbf{F}^2) - \xi(\operatorname{th}(\xi/\mathbf{F}^2) + \operatorname{th}(\beta\xi/\mathbf{F}^2))$$

получаются из  $g_1(\xi, E, \gamma, \beta)$  и  $g_2(\xi, \varepsilon, E, \beta)$  подстановкой  $E = 1/\mathbf{F}^2$ .

Рассмотрим теперь интеграл (16) при  $X < 0$ . На этот раз для вычисления  $J_1(X, M_1)$  будем использовать вспомогательный контур  $\Gamma_1^-$ , представляющий собой объединение горизонтального отрезка  $[-i\varepsilon_1; -i\varepsilon_1 + M_1]$  и расположенной под ним части контура  $\Gamma^-$  (рис. 4(а)), а для вычисления  $J_2(X, M_1)$  — контур  $\Gamma_1^+$ , симметричный контуру  $\Gamma_1^-$  относительно действительной оси (рис. 4(б)). Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были изложены выше

применительно к случаю  $X > 0$ , получим для величины отклонения свободной поверхности от ее равновесного положения формулу

$$Z(X) = \pi i \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{\eta_j X},$$

показывающую, что поверхностные возмущения перед обтекаемым препятствием имеют непериодический затухающий характер.

Препятствие в верхнем слое. Далее в той же постановке исследуем задачу о генерировании волновых возмущений свободной поверхности препятствием, которое моделируется точечным диполем с моментом  $m$ , расположенным в верхнем слое двухслойного потока несжимаемой жидкости (рис.5). Все обозначения сохраним теми же, что и в предыдущем случае. Поместим диполь в точку  $z = ih$  ( $0 < h < H$ ), а комплексно-сопряженную скорость в  $k$  слое  $\mu_k$  ( $k \in \{1, 2\}$ ), как и ранее, представим в виде  $\mu_k = V + U_k$ . Математическая формулировка исходной задачи выглядит следующим образом: найти аналитические функции  $U_1(z)$  и  $U_2(z)$ , удовлетворяющие граничным условиям (8–11); при этом  $U_1(z)$  должна быть регулярна в полосе  $0 < \operatorname{Im} z < H$  за исключением полюса второго порядка в точке  $z = ih$ :

$$U_1 = \frac{m}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(z + ih)^2} + \int_0^{\infty} [A(k)e^{ikz} + B(k)e^{-ikz}] dk \right], \quad (32)$$

а  $U_2(z)$  регулярна в полосе  $-H_1 < \operatorname{Im} z < 0$ :

$$U_2 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk, \quad (33)$$

где функции  $A(k), B(k), C(k)$  и  $D(k)$  подлежат определению. С помощью соотношения

$$-\frac{1}{(z-ih)^2} = \begin{cases} \int_0^{\infty} ke^{kh} e^{ikz} dk, & \text{если } y > h, \\ \int_0^{\infty} ke^{-kh} e^{-ikz} dk, & \text{если } y < h, \end{cases}$$

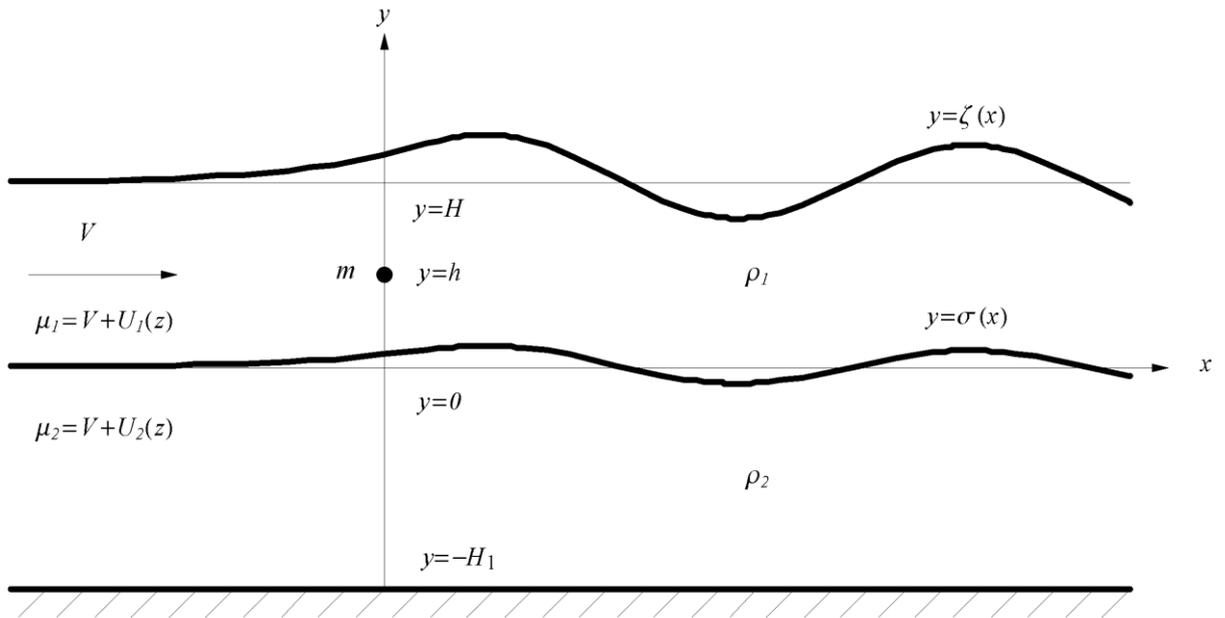


Рис. 5. Обтекание диполя, локализованного в верхнем слое двухслойного потока

перепишем выражение для комплексно-сопряженной скорости  $U_1(z)$  в областях верхнего слоя, расположенных соответственно выше и ниже диполя:

$$U_1(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [(ke^{kh} + A(k))e^{ikz} + B(k)e^{-ikz}] dk, & \text{если } y > h, \\ \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(k)e^{ikz} + (ke^{-kh} + B(k))e^{-ikz}] dk, & \text{если } y < h. \end{cases} \quad (34)$$

Подстановка формул (33–34) в граничные условия (8–11) приводит к неоднородной системе линейных уравнений относительно функций  $A(k), B(k), C(k)$  и  $D(k)$ :

$$\begin{cases} (k+\nu)e^{-kH}A + (k-\nu)e^{kH}B & = -k(k+\nu)e^{k(h-H)} \\ \delta(k+\nu)A + \delta(k-\nu)B - (k+\nu)C - (k-\nu)D & = -\delta k(k-\nu)e^{-kh} \\ A - B - C + D & = ke^{-kh} \\ e^{kH_1}C - e^{-kH_1}D & = 0 \end{cases}$$

Отсюда имеем следующие выражения для  $A(k)$  и  $B(k)$ :

$$A(k) = \frac{k[(\delta k + (1-\delta)\nu) \operatorname{th} kH_1 - k][\nu \operatorname{ch} k(H-h) - k \operatorname{sh} k(H-h)]}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}},$$

$$B(k) = \frac{k(k+\nu)e^{-kH} \{[(1-\delta)\nu \operatorname{ch} kh - \delta k \operatorname{sh} kh] \operatorname{th} kH_1 - k \operatorname{ch} kh\}}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}}.$$

Далее из (4) и (32) находим:

$$\zeta(x) = \frac{Vm}{2\pi g} \left[ \frac{x^2 - (H-h)^2}{(x^2 + (H-h)^2)^2} - \int_0^\infty (A(k)e^{-kH} + B(k)e^{kH}) \cos kx dk \right].$$

Совершив в этом равенстве переход к безразмерным переменным (15), запишем полученную формулу для величины возвышения свободной границы в следующем виде:

$$Z(X) = \frac{ME}{2\pi} \frac{X^2 - (E - E_0)^2}{(X^2 + (E - E_0)^2)^2} + J(X),$$

$$J(X) = -\frac{ME}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_1(\xi, E, E_0, E_1, \varepsilon)}{g_2(\xi, E, E_1, \varepsilon)} \cos X\xi d\xi, \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
g_1(\xi, E, E_0, E_1, \varepsilon) &= \xi \left\{ e^{-E\xi} [(1-\varepsilon)\xi + \varepsilon] \operatorname{th} E_1\xi - \xi \right\} \times \\
&\times [\operatorname{ch}(E-E_0)\xi - \xi \operatorname{sh}(E-E_0)\xi] + (\xi+1) \times \\
&\times \{ [\varepsilon \operatorname{ch} E_0\xi - (1-\varepsilon)\xi \operatorname{sh} E_0\xi] \operatorname{th} E_1\xi - \xi \operatorname{ch} E_0\xi \} / \operatorname{ch} E\xi, \\
g_2(\xi, E, E_1, \varepsilon) &= \xi^2 + [(1-\varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi (\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi).
\end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральные выражения в (16) и (35) имеют одни и те же полюса, расположенные на положительной действительной оси. Поэтому волновая структура возмущений свободной поверхности, возникающих при обтекании препятствия над слоем скачка, будет определяться тем же количеством мод и теми же волновыми числами, что и в рассмотренном выше случае его локализации под слоем скачка. Следовательно, критерии существования внутренней и поверхностной мод останутся неизменными (см. (22–23) или (30–31)).

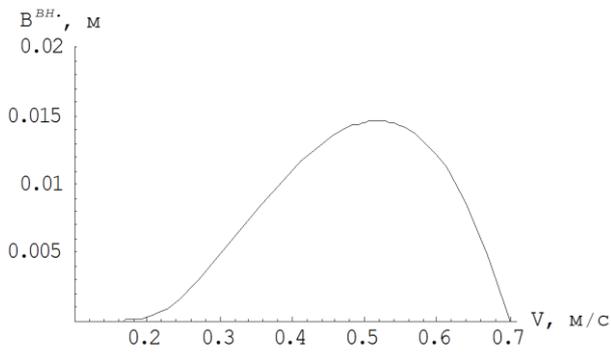
Вычисляя интеграл  $J(X)$  по той же схеме, что и в предыдущей задаче, получим следующее выражение для волновой части поверхностных возмущений за обтекаемым препятствием (т.е. при  $X > 0$ ):

$$W(X) = ME \sum_{j=1}^s \frac{g_1(\xi_j)}{g'_2(\xi_j)} \sin \xi_j X. \quad (36)$$

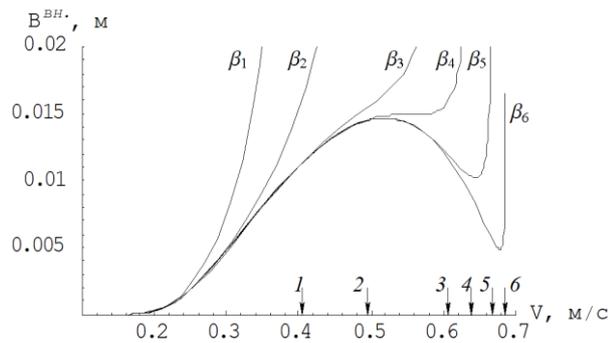
Здесь, как и выше,  $\xi_j$  — положительные корни уравнения (17), а  $s$  — их количество. Механизм генерации поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводного препятствия двухслойным потоком бесконечной глубины, проанализирован в предыдущих разделах. В рассматриваемой задаче с конечной глубиной потока подобный механизм аналогичен. Однако поиск

аналитических выражений, описывающих волновую структуру поверхностных возмущений (29) и (31) и их анализ в этом случае оказались существенно сложнее.

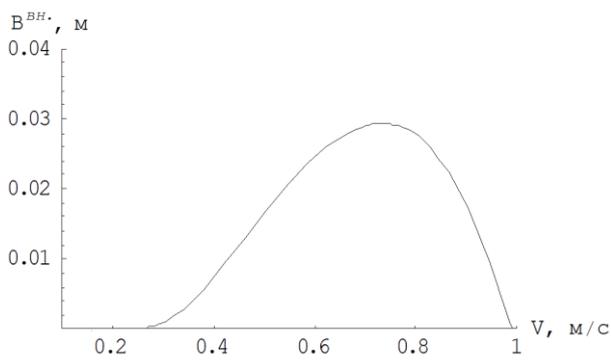
Расчеты амплитуд возмущений велись при значениях характеристик среды, соответствующих реальным условиям моря. Так, плотность верхнего слоя  $\rho_1 = 1023 \text{ кг/м}^3$ , а плотность нижнего выбиралась, начиная с  $\rho_2 = 1024 \text{ кг/м}^3$  и больше. Таким значениям плотностей соответствует минимальное значение параметра  $\varepsilon$ , равное 0.001. Момент диполя  $m$  был выбран пропорциональным скорости потока  $V$ :  $m/V = 1600 \text{ м}^2$ . Невозмущенное положение скачка плотности соответствовало глубинам  $H = 50 \text{ м}$  и  $H = 70 \text{ м}$ , а локализация препятствия (диполя) ограничивалась тремя горизонтами:  $h = 7,4$  и  $1 \text{ м}$  как над скачком, так и под ним. Отметим, что задание условия  $m/V = \text{const}$  продиктовано желанием сделать геометрию моделируемого диполем препятствия независимой от скорости течения  $V$  при его значительном удалении от свободной поверхности, слоя скачка и дна бассейна. Действительно, в плоском безграничном потоке однородной жидкости диполь с моментом  $m$  моделирует круговой цилиндр, радиус которого  $r = \sqrt{m/(2\pi V)}$  не зависит от  $V$ , если  $m/V = \text{const}$ . Ясно, что в случае двухслойного потока конечной глубины наличие свободной границы, поверхности раздела плотностей и дна будет оказывать искажающее влияние на форму тела, моделируемого диполем, однако если диполь удален на достаточно большое расстояние от указанных поверхностей, то это влияние будет пренебрежимо малым.



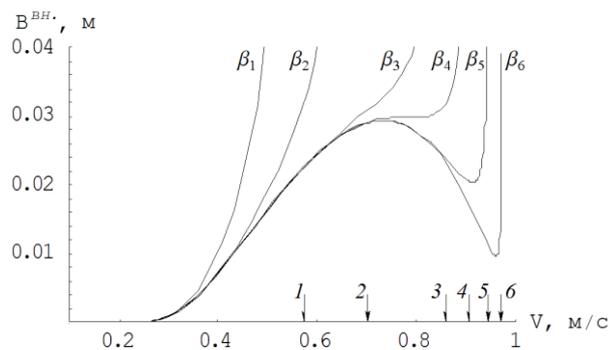
$\varepsilon = 0.001$



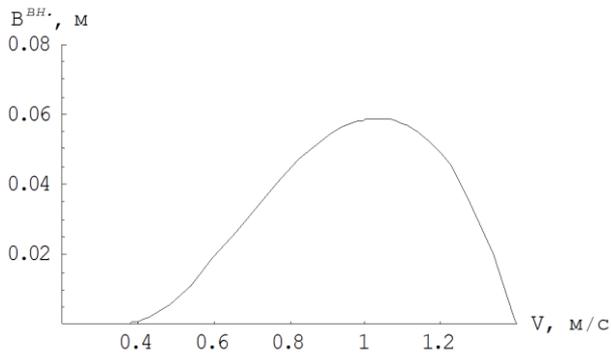
$\varepsilon = 0.001$



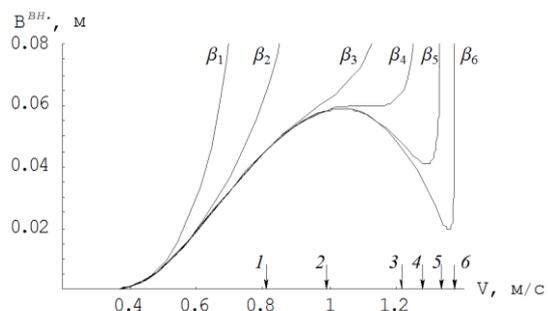
$\varepsilon = 0.002$



$\varepsilon = 0.002$



$\varepsilon = 0.004$

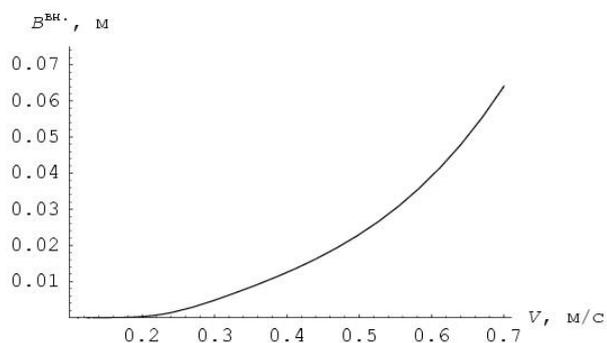


$\varepsilon = 0.004$

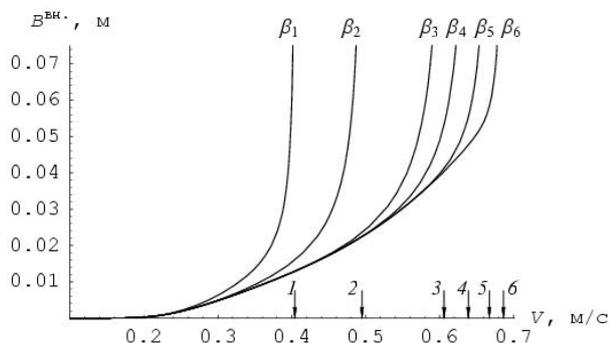
Рис. 6.4.6. Амплитуды внутренней моды поверхностных возмущений при обтекании препятствия под слоем скачка плотности при бесконечной (левые графики) и конечной (правые) глубинах для шести значений параметра  $\beta$

(соотношения толщин нижнего и верхнего слоев двухслойной жидкости):

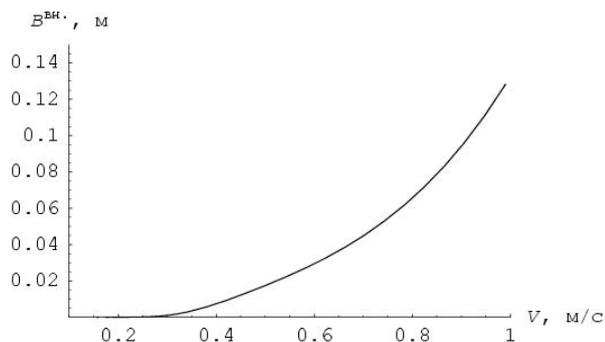
$$\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1, \beta_3 = 3, \beta_4 = 5, \beta_5 = 10, \beta_6 = 25$$



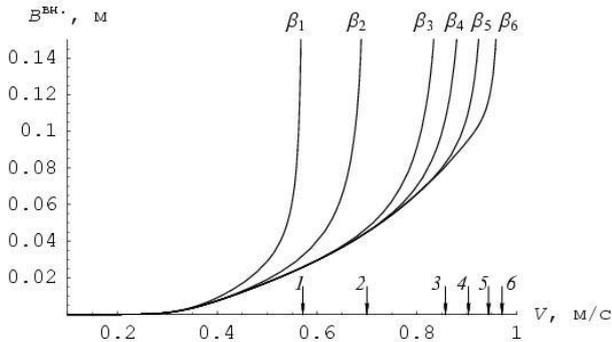
$$\varepsilon = 0.001$$



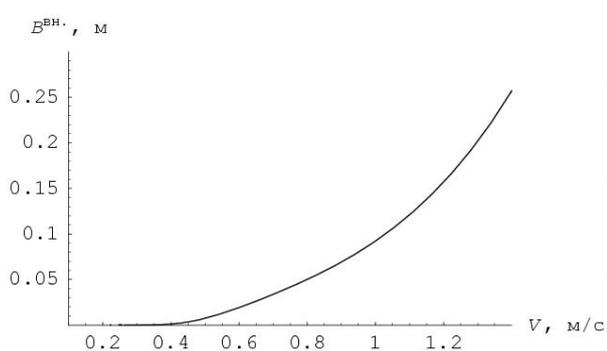
$$\varepsilon = 0.001$$



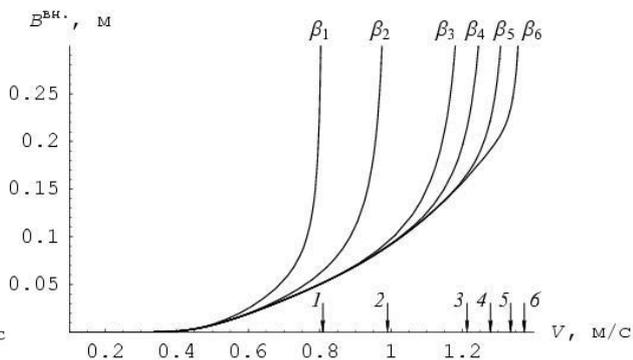
$$\varepsilon = 0.002$$



$$\varepsilon = 0.002$$



$$\varepsilon = 0.004$$



$$\varepsilon = 0.004$$

Рис. 7. Амплитуды внутренней моды поверхностных возмущений при обтекании препятствия над слоем скачка плотности при бесконечной (левые

графики) и конечной (правые) глубинах для шести значений параметра  $\beta$  (соотношения толщин нижнего и верхнего слоев двухслойной жидкости):

$$\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1, \beta_3 = 3, \beta_4 = 5, \beta_5 = 10, \beta_6 = 25$$

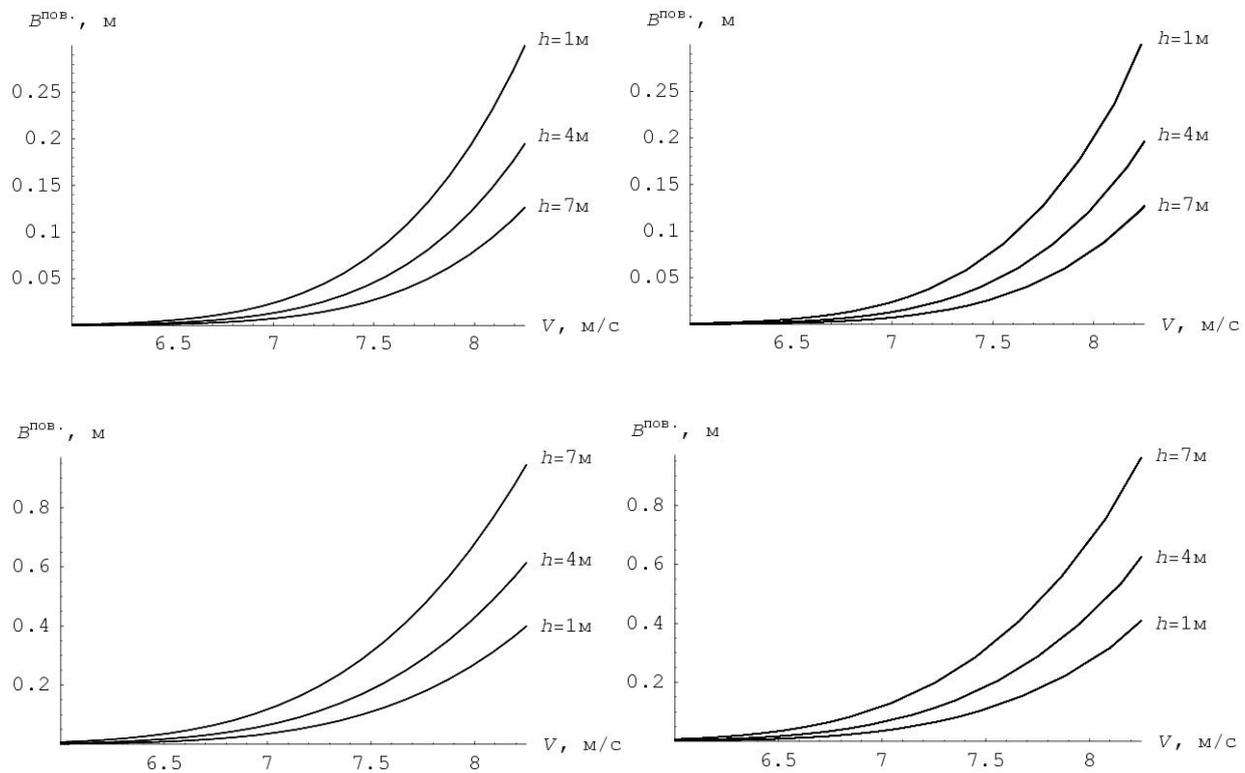


Рис. 8. Амплитуды поверхностной моды при обтекании препятствия под слоем скачка плотности (верхняя пара графиков) и над ним (нижняя пара).

На рис. 6–8 для случая  $H = 50\text{м}$ ,  $h = 4\text{м}$  приведены графики зависимости амплитуд поверхностных волн  $B$  от скорости набегающего потока  $V$  при различных значениях параметров  $\varepsilon$  и  $\beta$ . Прежде всего, на этих графиках видно, что возмущения за счет внутренней и поверхностной мод проявляются на интервалах скорости потока, существенно разнесенных между собой:  $0 - V_{cr}^{BH}$  и

6.5–8.5 м/с соответственно, далее выходя из области линейности задачи (при больших скоростях поверхностные волны перестают корректно описываться теорией малых возмущений). В первом интервале (при меньших скоростях) “работает” внутренняя мода, во втором — поверхностная. Причем для внутренней моды в соответствии с критерием ее возникновения (22) (или (30)) характерно расширение диапазона существования при увеличении мощности слоя скачка плотности  $\varepsilon$ . В целях наглядности сравнения амплитуд  $B(V)$  при обтекании препятствия потоками бесконечной и конечной глубины графики на рис. 6.4.6–6.4.8 представлены парами (соответственно слева и справа). Результаты расчетов амплитуды внутренней моды для случая локализации диполя под слоем скачка и над ним приведены на рис. 6 и 7 соответственно. Пары графиков построены для трех значений мощности скачка  $\varepsilon$ , а правые графики — для шести значений параметра  $\beta$  ( $\varepsilon \in \{0.001, 0.002, 0.004\}$ ,  $\beta \in \{0.5, 1, 3, 5, 10, 25\}$ ). Для каждого значения  $\beta$  стрелкой с цифрой, равной номеру индекса у  $\beta$ , указано значение критической скорости (максимальной скорости потока  $V$ , при которой возникает внутренняя мода). Как видно, в морских условиях ее величина не превышает 1–1.5 м/с.

Для поверхностной моды верхняя пара графиков соответствует обтеканию препятствия под слоем скачка, а нижняя — над ним. При этом величины  $\varepsilon$  были выбраны теми же самыми, что и в случае внутренней моды, а  $\beta \in \{0.5, 2, 10\}$ .

По качественному характеру зависимости  $B(V)$  и значениям самих амплитуд две моды — внутренняя  $B^{\text{вн.}}(V)$  и поверхностная  $B^{\text{пов.}}(V)$  — существенно отличаются друг от друга. Различия проявляются и “внутри” каждой из мод в зависимости от локализации препятствия относительно скачка плотности (сверху или снизу), глубины слоя скачка и глубины погружения препятствия. Так, для внутренней моды, как и ожидалось, наблюдается существенная зависимость ее амплитуды от мощности скачка плотности (рис. 6-7), и такая зависимость проявляется при условии как бесконечной, так и конечной глубины потока.

Внутренние моды отличаются ещё одной характерной особенностью. Так, на рис. 6 в случае бесконечной глубины внутренняя мода представлена одной кривой  $B^{\text{вн.}}(V)$ , а при конечной глубине — множеством кривых  $B_j^{\text{вн.}}(V) = B^{\text{вн.}}(\beta_j, V)$ , соответствующих разным значениям  $H_1^{(j)}$  или  $\beta_j = H_1^{(j)}/H$ . Как видно, если  $\beta \rightarrow +\infty$ , то при любом значении скорости  $V$ , находящемся внутри диапазона существования внутренней моды в бесконечно глубоком потоке, амплитуда внутренней моды в потоке конечной глубины  $B^{\text{вн.}}(\beta, V)$  стремится к своему соответствующему значению  $B_\infty^{\text{вн.}}(V)$  для случая бесконечной глубины. В то же время правые концы кривых  $B_j^{\text{вн.}}(V)$  из определенных точек вблизи кривой  $B_\infty^{\text{вн.}}(V)$  резко “срываются” вверх и уходят на бесконечность. В окрестностях таких точек линейная теория становится неприменимой для описания поверхностных волн. Кроме того, результаты расчетов

свидетельствуют о том, что при фиксированном значении скорости течения  $V$  с ростом параметра  $\beta$  амплитуда внутренней моды монотонно убывает. При фиксированном значении  $\beta$  зависимость  $B = B(V)$  может иметь как монотонный (возрастающий, если  $\beta < 3$ ), так и немонотонный характер (если  $\beta > 3$ ). Таким образом, сравнение результатов решения задач об обтекании диполя потоками бесконечной и конечной глубины показало, что в последнем случае как амплитуда внутренней моды, так и диапазон скоростей, внутри которого она возникает, существенным образом зависят от параметра  $\beta_j = H_1^{(j)}/H$  (или толщины нижнего слоя  $H_1^{(j)}$  при фиксированном значении толщины верхнего).

Аналогичный характер изменения кривых  $B_j^{\text{вн.}}(V)$  проявляется при сравнении их в условиях конечного и бесконечного по глубине потоков и в случае локализации препятствия над скачком плотности (рис. 7). Здесь, как и для первой задачи, внутренняя мода на правых графиках представлена множеством кривых  $B_j^{\text{вн.}}(V)$ , соответствующих разным значениям  $\beta_j$ . На этих графиках видно, что, как и выше, при  $\beta \rightarrow \infty$  амплитуда внутренней моды  $B^{\text{вн.}}(\beta, V)$  стремится к соответствующему значению  $B_\infty^{\text{вн.}}(V)$  для случая бесконечно глубокого потока. Кроме того, очевидно, что при конечной глубине потока диапазон существования внутренней моды и ее амплитуда зависят от параметра  $\beta_j = H_1^{(j)}/H$ . Однако в данном случае зависимость амплитуды волны от скорости течения является монотонно возрастающей при любых значениях  $\beta$ .

Зависимость амплитуд внутренней моды проявляется и от горизонта залегания скачка плотности  $H$ . Так, расчеты  $B_j^{\text{вн.}}(V)$  для двух разных глубин его локализации ( $H = 50\text{м}$  и  $H = 70\text{м}$ ) показали, что углубление скачка приводит к существенному уменьшению амплитуд поверхностных возмущений.

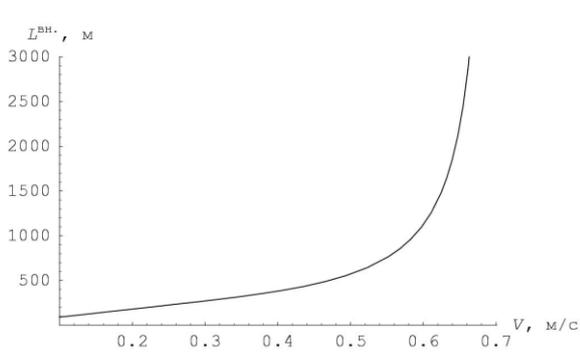
Анализируя поверхностную моду и поведение ее амплитуд  $B_j^{\text{пов.}}(V)$ , — пары кривых на рис. 8 — отметим, что проявление такой моды обусловлено наличием в потоке свободной границы. Величина ее амплитуды практически не зависит от мощности слоя скачка плотности  $\varepsilon$  (в диапазоне значений  $\varepsilon$ , характерном для реальных морских условий), что было проверено расчетами  $B_j^{\text{пов.}}(V)$  при разных значениях  $\varepsilon$ . В этом случае глубинные возмущения при выходе на поверхность “не замечают” плотностную неоднородность. Аналогичные расчеты показывают, что амплитуда поверхностной моды также не зависит и от толщины нижнего слоя (при  $\beta > 0.5$ ). Кривые  $B_j^{\text{пов.}}(V)$  на левом и правом графиках рис. 8 практически идентичны как по форме, так и значениям их амплитуд, т.е. наличие у потока нижней границы влияет на результаты расчетов весьма незначительно. В то же время сравнение значений амплитуд волн  $B_j^{\text{пов.}}(V)$ , возникающих при обтекании препятствия, расположенного над и под скачком плотности соответственно, показывает существенное (в несколько раз!) различие между ними. На первый взгляд, представляется, что скачок плотности оказывает сильно экранирующий эффект на распространение вверх возмущений. Однако, как показали расчеты, ослабление поверхностных волн в

основном связано с увеличением глубины обтекаемого препятствия и практически не зависит от  $\varepsilon$ , на что указывают представленные на графиках кривые  $B_j^{\text{пов.}}(V)$ , полученные для расчетных горизонтов его локализации  $h = 7\text{ м}, 4\text{ м}$  и  $1\text{ м}$  относительно слоя скачка плотности, т.е. поверхностная мода возникает непосредственно за счет обтекания препятствия.

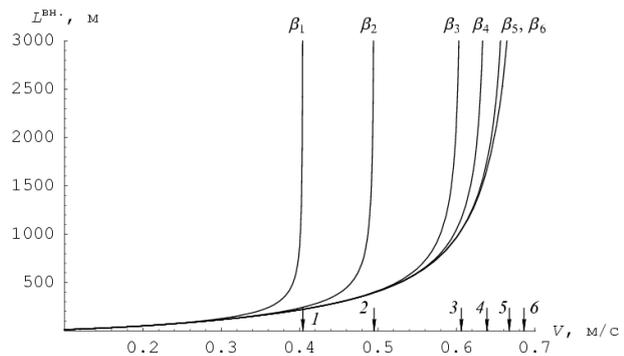
Заканчивая анализ поведения амплитуд поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводных препятствий, следует указать на особую роль в их формировании скорости потока. Как видно из графиков, представленных на рис. 6–8, волновые возмущения на свободной границе в относительно широком промежуточном интервале изменения скорости  $V$  визуально отсутствуют, т.е. этот интервал является зоной, закрытой для выхода глубинных возмущений на поверхность воды. Она простирается от максимального значения скорости потока  $V$ , при котором в бесконечно глубоком потоке возникает внутренняя мода ( $V_{\text{кр.}}$ , определяемого формулой (10)) до тех значений  $V$ , при которых амплитуды уже поверхностных мод значимы. Следуя терминологии, принятой в морской гидроакустике, такой интервал можно определить, как “зону тени” подобных гидродинамических возмущений.

Наряду с амплитудами поверхностных волн рассчитывались также их длины:  $L^{\text{вн.}} = 2\pi V^2 / (g\xi_1)$  и  $L^{\text{пов.}} = 2\pi V^2 / (g\xi_2)$ , где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — соответственно меньший и больший корни уравнения (17). Из этого уравнения следует, что для обеих мод длина волны (в отличие от амплитуды) не зависит от локализации

препятствия. Результаты расчетов при  $H = 50\text{ м}$  для внутренней и поверхностной моды представлены соответственно на рис. 9 и рис. 10. При этом на рис. 9 стрелками, как и выше, обозначены критические скорости. На каждом рисунке слева изображены графики зависимости длины волны от скорости потока  $V$  для случая бесконечной глубины, а справа — для случая конечной глубины. Расчеты длин волн проводились при тех же значениях параметров  $\varepsilon$  и  $\beta$ , что и расчеты их амплитуд (т.е.  $\beta \in \{0.5, 1, 3, 5, 10, 25\}$  для внутренней моды,  $\beta \in \{0.5, 2, 10\}$  — для поверхностной,  $\varepsilon \in \{0.001, 0.002, 0.004\}$  для обеих мод).



$\varepsilon = 0.001$



$\varepsilon = 0.001$

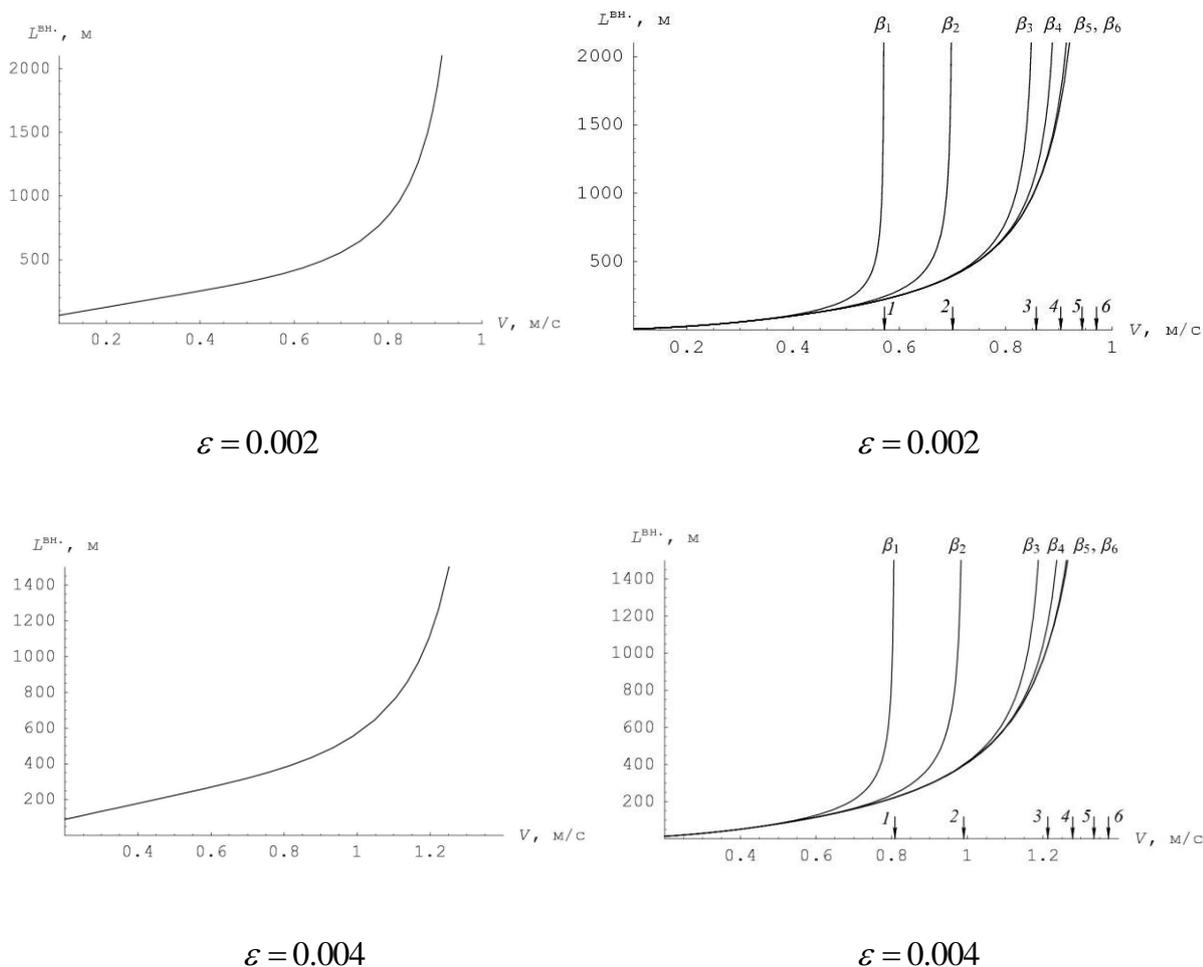


Рис. 9. Длины волн внутренней моды поверхностных возмущений, возникающих за обтекаемым двухслойной жидкостью препятствием, при бесконечной (левые графики) и конечной (правые) глубинах потока для шести значений параметра  $\beta$  (соотношения толщин нижнего и верхнего слоев):

$$\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1, \beta_3 = 3, \beta_4 = 5, \beta_5 = 10, \beta_6 = 25$$

Что касается зависимости длины волны внутренней моды  $L^{BH}$  от скорости потока  $V$ , то она в целом аналогична рассмотренной выше зависимости ее амплитуды от  $V$  в случае обтекания препятствия, локализованного над скачком плотности. Для каждого значения  $\beta$  длина волны монотонно возрастает, резко увеличиваясь при приближении  $V$  к своему критическому значению. В то же

время при фиксированном значении  $V$  длина волны уменьшается с увеличением толщины нижнего слоя (т.е. при возрастании  $\beta$ ) и стремится к своему предельному значению для случая потока бесконечной глубины при  $\beta \rightarrow \infty$ .

Для поверхностной моды длина волны в случае потока бесконечной глубины  $L^{\text{пов.}} = 2\pi V^2/g$  не зависит от мощности скачка  $\varepsilon$  (левый график). А в случае потока конечной глубины кривые на правых графиках соответствующие девяти парам значений  $\varepsilon$  и  $\beta$ , сливаются. Это указывает на то, что длина волны поверхностной моды практически не зависят от мощности слоя скачка плотности  $\varepsilon$  (в диапазоне значений  $\varepsilon$ , характерном для реальных морских условий) и от соотношения толщин нижнего и верхнего слоев  $\beta$  при  $\beta > 0.5$ . Таким образом, в этом случае неоднородность потока и наличие у него нижней границы практически не влияют на параметры поверхностных возмущений.

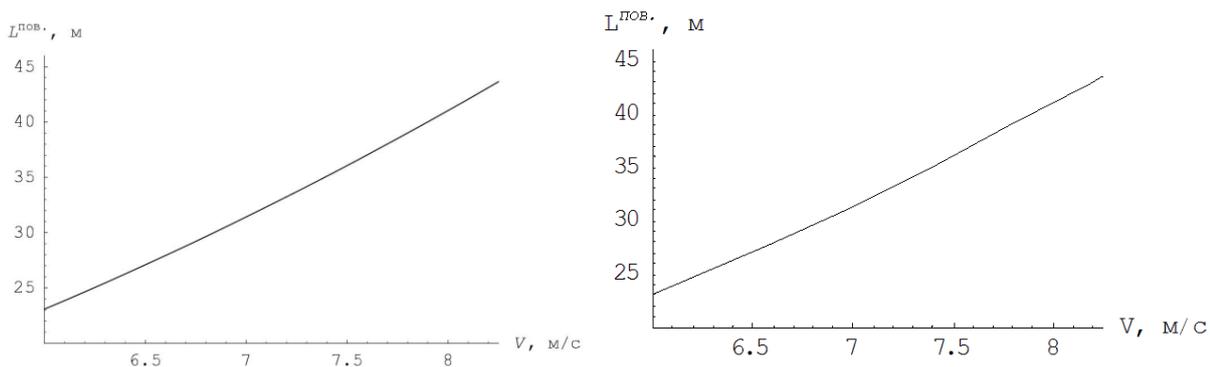


Рис. 10. Длины волн поверхностной моды поверхностных возмущений, возникающих за обтекаемым двухслойной жидкостью препятствием, при бесконечной (левый график) и конечной (правый) глубинах потока



**5. РАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДАЛЬНИХ ПОЛЕЙ  
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ИСТОЧНИКА В  
ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**



В данном разделе рассмотрена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений от локализованного источника в тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Полученные решения позволяют описывать волновые возмущения как внутри, так и вне волнового клина Кельвина и выражаются через функцию Эйри и ее производные.

Постановка задачи и интегральная форма решения для возвышения свободной поверхности. Рассматривается стационарная картина волновых возмущений на поверхности потока идеальной тяжелой жидкости бесконечной глубины, которая движется со скоростью  $V$  в положительном направлении оси  $x$ . Волны генерируются точечным источником, расположенным на глубине  $H$  (ось  $z$  направлена вверх от невозмущенной жидкости), мощность которого нарастает по закону  $q = e^{\varepsilon t} (-\infty < t < \infty)$ , и далее в полученном решении ищется предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При этом в силу линейности задачи для источника произвольной мощности  $Q (Q = const)$  достаточно результат, полученный для источника единичной мощности  $q$  (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), умножить на  $Q$ .

Возмущение потенциала  $\Phi(x, y, z, t)$  относительно однородного потока, движущегося со скоростью  $V$  ( $\nabla \Phi = (u, v, w)$ , где  $u, v, w$  - компоненты возмущения вектора скорости  $(V, 0, 0)$ ), описывается уравнением с соответствующим линеаризованным граничным условием на поверхности жидкости

$$\Delta\Phi(x, y, z, t) = e^{\alpha t} \delta(x)\delta(y)\delta(z + H), \quad z < 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\Delta$  - трехмерный оператор Лапласа, а  $\delta(x)$  - дельта функция Дирака.

Возвышение свободной поверхности тяжелой жидкости  $Z(x, y, t)$  связано с потенциалом  $\Phi(x, y, z, t)$  условием

$$Z(x, y, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(x, y, z, t), \quad z = 0 \quad (2)$$

Решение задачи (1) ищется в виде  $\Phi(x, y, z, t) = e^{\alpha t} \varphi(x, y, z)$ , где функция  $\varphi(x, y, z)$  определяется из задачи

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z + H), \quad z < 0$$

$$\left(\varepsilon + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

Фурье-образ потенциала  $\varphi(x, y, z)$

$$\Omega(\mu, \nu, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu y} \varphi(x, y, z) dy$$

находится из краевой задачи ( $k^2 = \mu^2 + \nu^2$ )

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - k^2 \Omega = \delta(z + H), \quad z < 0$$

$$(\varepsilon - i\mu V)^2 \Omega + g \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

$$\Omega \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty,$$

решение которой при  $z = 0$  имеет вид

$$\Omega(\mu, \nu, 0) = \frac{-g \exp(-kH)}{(\varepsilon - i\mu V)^2 + gk}$$

Тогда возвышение  $\eta(x, y)$  ( $Z(x, y, t) = e^{\alpha t} \eta(x, y)$ ), учитывая соотношение

(2), можно представить в виде

$$\eta(x, y) = \frac{iV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu y} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu \exp(-kH - i\mu x) d\mu}{\mu^2 V^2 + 2i\varepsilon\mu V - gk} \quad (3)$$

В выражении (3) параметр  $\varepsilon$  сохранен только в одном члене знаменателя, это нужно для определения смещения полюса подынтегрального выражения относительно действительной оси (в верхнюю или нижнюю полуплоскость).

Построение неравномерной асимптотики решения: интегрирование с помощью вычетов и метода стационарной фазы. В полярных координатах: ( $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ ), ( $\mu = k \cos \psi$ ,  $y = k \sin \psi$ ), выражение (3) можно представить в виде

$$\eta(r, \alpha) = \frac{iV}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^{\infty} \frac{k \exp(-kH - ikr \cos(\psi - \alpha))}{kV^2 \cos^2 \psi + 2i\varepsilon V \cos \psi - g} dk \quad (4)$$

Далее исследуется выражение для возвышения  $\eta(r, \alpha)$  при больших значениях  $r$  (точнее, при  $gr/V^2 \gg 1$ ). Подынтегральное выражение по переменной интегрирования  $k$  имеет простой полюс:  $k^* = g A^{-2} - 2i\varepsilon A^{-1}$ ,  $A = V \cos \psi$ , который при значениях  $\cos \psi < 0$  смещен в верхнюю полуплоскость, а при  $\cos \psi > 0$  - в нижнюю. Функцию  $\eta(r, \alpha)$  можно представить в виде суммы двух слагаемых:  $\eta(r, \alpha) = \eta_1(r, \alpha) + \eta_2(r, \alpha)$ , при

этом в слагаемом  $\eta_1(r, \alpha)$  интегрирование по  $\psi$  производится в области, где  $\cos \psi < 0$ , а в слагаемом  $\eta_2(r, \alpha)$  - в области, где  $\cos \psi > 0$ .

Для вычисления слагаемого  $\eta_1(r, \alpha)$  при  $\cos(\psi - \alpha) < 0$  контур интегрирования по  $k$  можно повернуть на  $\pi/2$  и совместить с положительным направлением мнимой оси на комплексной плоскости  $k$  (вычет в полюсе  $k^*$  учитывается), а при  $\cos(\psi - \alpha) > 0$  контур поворачивается  $-\pi/2$ , при этом он совпадает с отрицательным направлением мнимой оси и вычет не учитывается. Можно показать, что и в том, и в другом случае интеграл вдоль мнимой оси имеет порядок  $O(1/r^2)$  при  $r \rightarrow \infty$ . В результате слагаемое  $\eta_1(r, \alpha)$  имеет вид

$$\eta_1(r, \alpha) = -\frac{g}{2\pi V^3} \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} \cos^{-3} \psi \exp\left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi}\right) d\psi + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Аналогичным образом можно найти слагаемое  $\eta_2(r, \alpha)$ , которое комплексно сопряжено с  $\eta_1(r, \alpha)$ . Окончательно выражение для возвышения  $\eta(r, \alpha)$  можно представить в виде

$$\eta(r, \alpha) = -\frac{g}{\pi V^3} \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} \cos^{-3} \psi \exp\left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi}\right) \cos(rS(\psi, \alpha)) d\psi \quad (5)$$

$$S(\psi, \alpha) = \frac{g \cos(\psi - \alpha)}{V^2 \cos^2 \psi}$$

Интеграл (5) – четная функция по  $\alpha$ . Тогда асимптотику интеграла (6.6.5) при больших значениях  $r$  можно вычислить при помощи метода стационарной фазы, и для этого необходимо найти точки стационарности фазы, т.е. корни уравнения  $S'_\psi(\psi, \alpha) = 0$ . На интервале интегрирования  $(\pi/2 + \alpha, 3\pi/2)$  лежат две стационарные точки: при  $\alpha > 0$   $\psi_1(\alpha) = \pi/2 + \alpha/2 + b$  и  $\psi_2(\alpha) = \pi + \alpha/2 - b$ , ( $\psi_1(\alpha) < \psi_2(\alpha)$ ), при  $\alpha < 0$   $\psi_1(\alpha) = 3\pi/2 + \alpha/2 + b$  и  $\psi_2(\alpha) = \pi + \alpha/2 - b$ , ( $\psi_1(\alpha) > \psi_2(\alpha)$ ),  $b = \arcsin(3 \sin \alpha)/2$ . Стационарные точки существуют только при значениях  $\alpha$ , лежащих в интервале:  $-\arcsin(1/3) < \alpha < \arcsin(1/3)$ . Это условие определяет на поверхности тяжелой жидкости область, в которой присутствуют волновые движения - клин Кельвина.

Зная стационарные точки, можно легко получить хорошо известную картину гребней «корабельных волн» внутри клина Кельвина в полярных координатах:  $r = -2\pi n / S(\psi_1(\alpha), \alpha)$  и  $r = -2\pi n / S(\psi_2(\alpha), \alpha)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . При этом первое равенство (стационарная точка  $\psi_1(\alpha)$ ) отвечает за продольные гребни, а второе (стационарная точка  $\psi_2(\alpha)$ ) – за поперечные. Знак минус берется потому, что фаза в стационарных точках отрицательна.

На рис.1 изображена картина линий равной фазы (гребней), разность фаз между соседними гребнями равна  $2\pi$ . Здесь и в дальнейшем параметры расчетов, характерные для реальных океанических условий, были следующие:  $V = 11 \text{ м/с}$ ,  $H = 6 \text{ м}$ .

Асимптотика интеграла (5) при  $r \rightarrow \infty$ , вычисленная с помощью метода стационарной фазы, имеет вид

$$\eta(r, \alpha) = -\frac{g}{V^3} \sum_{j=1}^r \sqrt{\frac{2}{\pi r |S''_{\psi\psi}(\psi_j, \alpha)|}} \cos^{-3} \psi_j \exp\left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi_j}\right) \cos(\Lambda) \quad (6)$$

$$\Lambda = rS(\psi_j, \alpha) + \frac{\pi}{4} \text{Sign } S''_{\psi\psi}(\psi_j, \alpha)$$

$$\text{Sign } S''_{\psi\psi}(\psi_1, \alpha) = +1, \quad \text{Sign } S''_{\psi\psi}(\psi_2, \alpha) = -1$$

Неравномерная асимптотика (6) работает только внутри клина при  $-\alpha^* < \alpha < \alpha^*$  (в этом интервале присутствуют стационарные точки) и перестает работать при приближении к границе клина, где стационарные точки сливаются, т.е. при  $\alpha = \alpha^* = \arcsin 1/3$ :  $\psi_1(\alpha^*) = \psi_2(\alpha^*) = \alpha^* / 2 + 3\pi / 4$ , и  $S''_{\psi\psi}(\psi_{1,2}(\alpha), \alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \alpha^*$ .

Построение равномерной асимптотики решения. Равномерная

асимптотика интеграла (5) описывает возвышение  $\eta(r, \alpha)$  не только внутри волнового клина Кельвина, но и за его пределами, а также на самой границе клина. При этом равномерная асимптотика внутри клина должна совпадать с неравномерной асимптотикой (6), полученной с помощью метода стационарной фазы. Поскольку волновая картина для возвышения  $\eta(r, \alpha)$  симметрична относительно оси  $x$ , т.е.  $\eta(r, \alpha)$  - четная функция переменной  $\alpha$ , далее рассматривается случай  $\alpha > 0$ .

Как было показано выше, фазовая функция  $S(\psi, \alpha)$  имеет две точки поворота  $\psi_1(\alpha)$  и  $\psi_2(\alpha)$ , которые при  $\alpha \rightarrow \alpha^* = \arcsin(1/3)$  сливаются друг с другом:  $\psi_1(\alpha^*) = \psi_2(\alpha^*) = 3\pi/4 + \alpha^*/2 = \psi^*$ . Таким образом, для построения равномерной асимптотики необходимо решить классическую задачу об асимптотике интегралов с двумя сливающимися точками поворота. Интеграл (6.6.5) можно представить в виде

$$\eta(r, \alpha) = \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} f(\psi) \cos(rS(\psi, \alpha)) d\psi \quad (7)$$

$$f(\psi) = -g \exp(-gh A^{-2}) / \pi A^3$$

Далее используется неявная замена переменной интегрирования

$$S(\psi, \alpha) = a_0 + \sigma s - \frac{s^3}{3} \quad (8)$$

При этом стационарной точке  $\psi_1(\alpha)$  будет соответствовать точка  $s_1 = -\sqrt{\sigma}$ ,

а точке  $\psi_2(\alpha)$  - точка  $s_2 = \sqrt{\sigma}$ . Тогда из (6.6.8) можно получить

$$a_0(\alpha) = \frac{S(\psi_1) + S(\psi_2)}{2}, \quad \sigma(\alpha) = \left( \frac{3}{4} (S(\psi_2) - S(\psi_1)) \right)^{2/3} \quad (9)$$

Интеграл (7) при замене (8) имеет вид

$$\eta(r, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \cos(r(a_0 + \sigma s - s^3/3)) ds \quad (10)$$

$$G(s) = f(\psi) \frac{d\psi}{ds}$$

Нижний предел в интеграле (10) на самом деле находится из (8) при  $\psi = \pi/2 + \alpha$  и является корнем уравнения:  $a_0(\alpha) + \sigma(\alpha)s - s^3/3 = 0$ .

Данное уравнение имеет единственный действительный корень  $s^*(\alpha)$ , который, используя формулу Кардано, можно найти в явном виде

$$s^*(\alpha) = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \left[ \left(\sqrt{S(\psi_2)} + \sqrt{S(\psi_1)}\right)^{2/3} + \left(\sqrt{S(\psi_2)} - \sqrt{S(\psi_1)}\right)^{2/3} \right]$$

где  $s^*(\alpha) \rightarrow -\infty$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $s^*(\alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow \pi$ . Возможность замены нижнего предела  $s^*(\alpha)$  на  $-\infty$  и оценка допускаемой при этом ошибки будут обсуждаться ниже.

Медленно меняющуюся функцию  $G(s)$  в окрестности стационарных точек можно представить в виде

$$G(s) = b_0 + b_1 s \tag{11}$$

$$b_0(\alpha) = \frac{G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma})}{2}, \quad b_1(\alpha) = \frac{G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma})}{2\sqrt{\sigma}} \tag{12}$$

Входящие в  $G(\pm\sqrt{\sigma})$  значения  $d\psi/ds$  находятся с помощью дифференцирования выражения (8) по переменной  $s$

$$G(\sqrt{\sigma}) = f(\psi_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{S''_{\psi\psi}(\psi_2, \alpha)}}, \quad G(-\sqrt{\sigma}) = f(\psi_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{S''_{\psi\psi}(\psi_1, \alpha)}} \quad (13)$$

Подставляя разложение (11) в выражение (10) можно получить

$$\mu(r, \alpha) = J_1(r, \alpha) + J_2(r, \alpha) \quad (14)$$

Здесь первое слагаемое выражается через функцию Эйри:

$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xt - t^3/3) dt$ , а второе - через ее производную

$$J_1(r, \alpha) = \frac{2\pi}{r^{1/3}} b_0(\alpha) \cos(ra_0(\alpha)) Ai(\sigma(\alpha)r^{2/3}) \quad (15)$$

$$J_2(r, \alpha) = \frac{2\pi}{r^{2/3}} b_1(\alpha) \sin(ra_0(\alpha)) Ai'(\sigma(\alpha)r^{2/3})$$

где  $b_0(\alpha)$  и  $b_1(\alpha)$  определены в (12), а  $\sigma(\alpha)$  и  $a_0(\alpha)$  - в (9).

Равномерная асимптотика (14) – четная функция относительно  $\alpha = \pi/2$ .

Волновая картина также симметрична относительно оси  $Oy$ , что физически невозможно, т.к. далеко вверх по потоку возмущения отсутствуют. Происходит это из-за замены нижнего предела интегрирования в (10)  $s^*(\alpha)$  на  $-\infty$  (что

соответствует замене нижнего предела в (2)  $\pi/2 + \alpha$  на  $\pi/2$ ). Тогда полученные интегралы выражаются через функцию Эйри и ее производную. При  $0 < \alpha < \pi/2$  эта замена дает лишь добавку порядка  $O(1/r^2)$ , т.к. стационарные точки лежат на интервале  $(s^*(\alpha), \infty)$ . При  $\pi/2 < \alpha < \pi$  такую замену производить нельзя, но можно показать, что исходный интеграл (6.6.5) имеет порядок  $O(1/r^2)$  (в этом можно убедиться, дважды интегрируя (5) по частям).

В результате, в первом случае основной вклад в асимптотику интеграла (5) дают стационарные точки (порядок интеграла  $O(1/r^{1/3})$ ), а во втором случае вклад в интеграл дает лишь концевая точка интервала интегрирования  $s^*(\alpha)$  (порядок интеграла  $O(1/r^2)$ ). Таким образом, равномерная асимптотика работает при больших значениях  $r$  и  $0 < \alpha < \pi/2$ , а при  $\pi/2 < \alpha < \pi$  волновое поле убывает как  $1/r^2$ . Эта асимптотика регулярна на границе клина при  $\alpha = \alpha^*$ , где  $S'(\psi) = 0$  и  $S''(\psi) = 0$ , при этом  $b_0(\alpha^*) = G(0)$ ,  $b_1(\alpha^*) = G'(0)$ .

Для нахождения  $G(0)$  надо убедиться в регулярности функции  $d\psi/ds$  при  $s=0$ , а для нахождения  $G'(0)$  - в регулярности  $d^2\psi/ds^2$  в нуле. Тогда трижды и четырежды дифференцируя соотношение (8) по переменной  $\psi$ , можно получить

$$\frac{d\psi}{ds} = \left( -\frac{2}{S'''(\psi^*)} \right)^{1/3}, s=0$$

$$\frac{d^2\psi}{d^2s} = -\frac{S^{IV}(\psi^*)}{\sigma S'''(\psi^*)} \left( -\frac{2}{S'''(\psi^*)} \right)^{2/3}, s=0$$

Равномерная асимптотика при больших значениях  $r$  и  $\alpha$ , не очень близких к  $\alpha^*$ , переходит в неравномерную асимптотику (6). В этом можно убедиться, взяв в (14) вместо функции Эйри и ее производной их асимптотики при больших положительных значениях аргумента ( $x \rightarrow \infty$ ):  $Ai(x) \sim x^{-1/4} \cos(T)/\sqrt{\pi}$ ,  $Ai'(x) \sim x^{1/2} \sin(T)/\sqrt{\pi}$ ,  $T = 2x^{3/2}/3 - \pi/4$ . Оба слагаемых в (6.6.14) тогда будут иметь порядок  $O(1/\sqrt{r})$ . Непосредственно в окрестности границы клина в (14) можно оставить только первое слагаемое (порядка  $O(1/r^{1/3})$ ), а вне клина оба слагаемых (как и их асимптотики) экспоненциально малы.

На рис.2 показан поперечный срез волнового поля возвышения ( $x = 500\text{м}$ ,  $Q = 10^3 \text{ м}^3/\text{с}$ ), рассчитанный по формулам (6) и (14). На рис.3 показана трехмерная волновая картина поля возвышения на поверхности тяжелой жидкости, рассчитанная по формуле (14), т.е. равномерная асимптотика решения.

Построенные в данном разделе асимптотические решения - равномерные и позволяют описывать дальние поля поверхностных возмущений от локализованных источников как вне, так и внутри волнового клина Кельвина. Полученные асимптотики дальних полей поверхностных волновых возмущений дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения. Тем самым, как уже отмечалось, открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики, в том числе для проведения экспресс оценок при натурных измерениях волновых полей в морской среде.

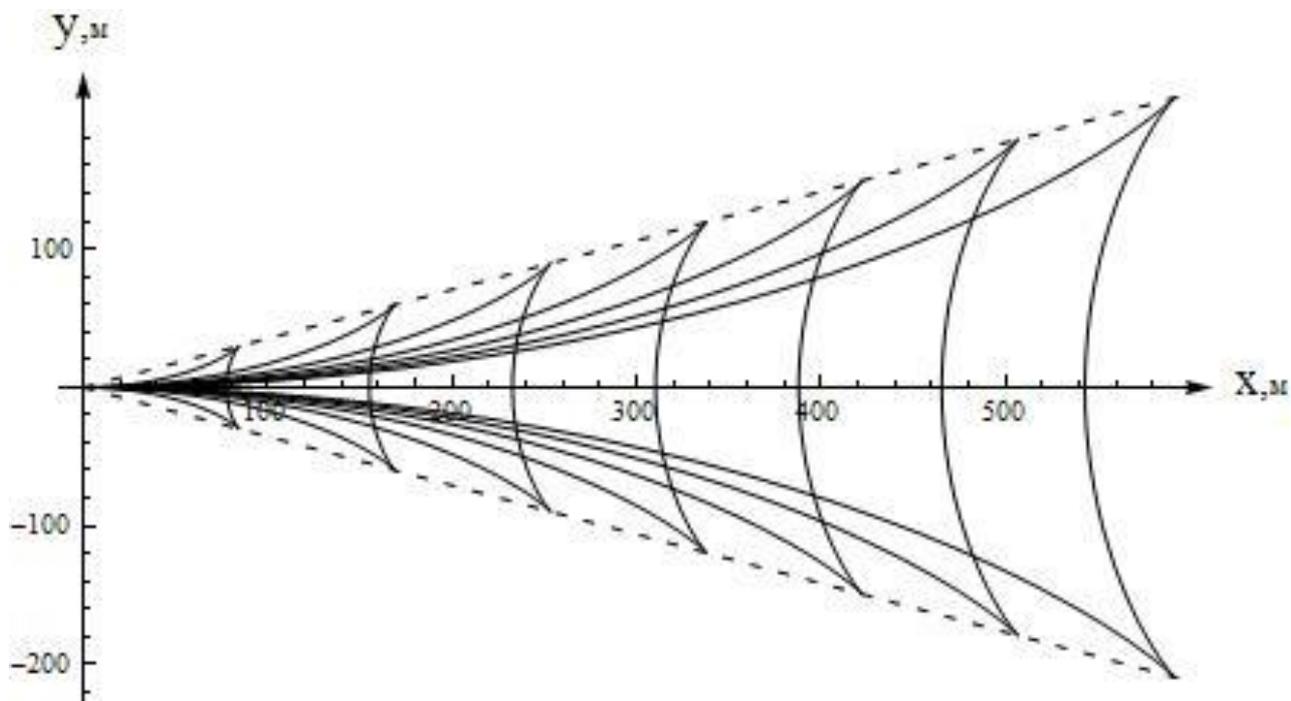


Рис.1 Линии равной фазы (разность фаз между гребнями равна  $2\pi$ )

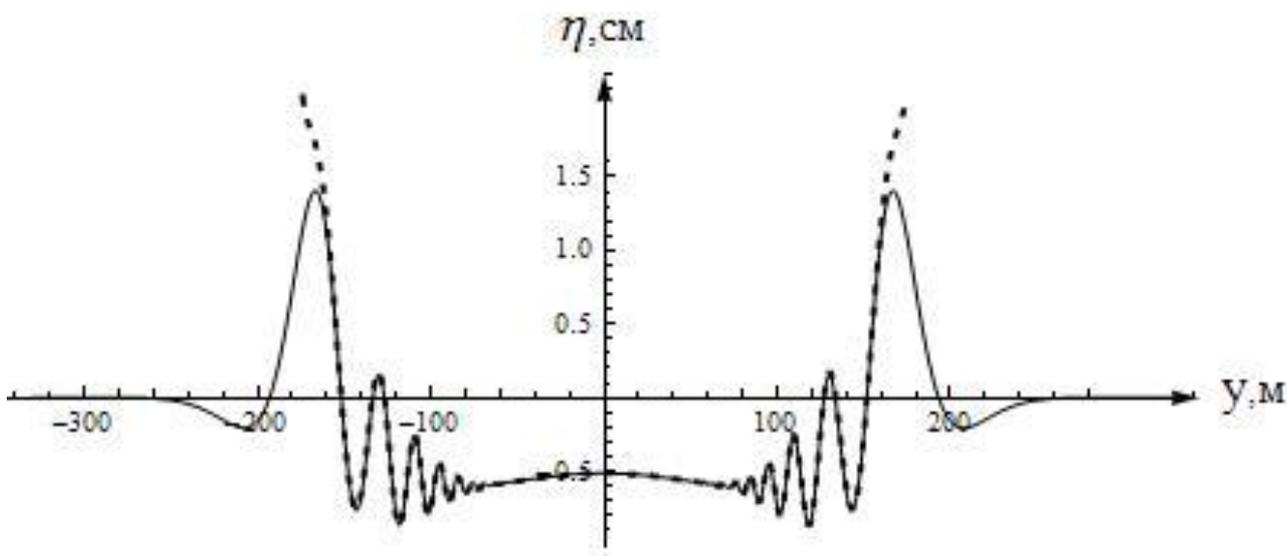


Рис.2 Поперечный срез поля возвышения (пунктирная линия - стационарная фаза, сплошная линия - равномерная асимптотика)

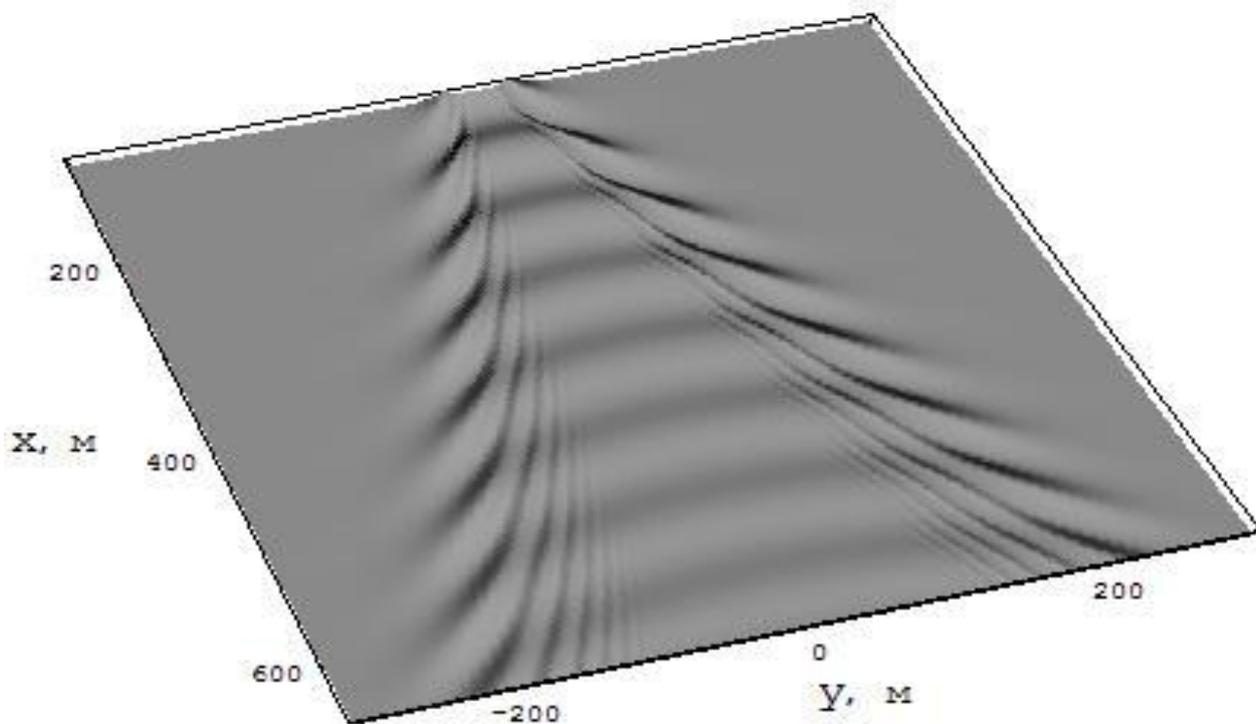


Рис.3 Поле возвышения на поверхности тяжелой жидкости (равномерная асимптотика)



**6.ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ  
ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ В  
ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**



На состояние свободной поверхности океана влияют как находящиеся в толще воды неоднородности (обтекаемые препятствия, изменения рельефа дна, полей плотности и течений), так и различные источники возмущений. Для правильной интерпретации данных, полученных при дистанционном зондировании морской поверхности, нужно знать причины, вызывающие те или иные поверхностные явления. Актуальной остается задача исследования процессов поверхностных колебаний в неоднородной по плотности и нестационарной морской среде и согласования результатов моделирования с видимыми поверхностными волнениями. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой поверхностных возмущений неоднородных и нестационарных природных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. В этой связи необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованными источниками в тяжелой однородной жидкости. Построенные модельные решения позволяют в дальнейшем получить асимптотические представления волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред.

В настоящем разделе рассмотрена задача построения равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованным пульсирующим источником возмущений в потоке тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины

Рассматривается стационарная картина волновых возмущений на поверхности потока идеальной тяжелой жидкости бесконечной глубины, которая движется со скоростью  $V$  в положительном направлении оси  $x$ . Волны генерируются точечным пульсирующим источником возмущений, расположенным на глубине  $H$  (ось  $z$  направлена вверх от невозмущенной жидкости), мощность которого изменяется по закону  $q = \exp(i\omega t) \exp(\varepsilon t) (-\infty < t < \infty)$ , и далее в полученном решении ищется предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В силу линейности задачи для расчета поля возмущений от пульсирующего источника произвольной мощности  $Q$  ( $Q = \text{const}$ ) достаточно результат, полученный для источника единичной мощности  $q$ , умножить на  $Q$ .

Возмущение потенциала  $\Phi(x, y, z, t)$  относительно однородного потока, движущегося со скоростью  $V$  ( $\nabla\Phi = (u, v, w)$ , где  $u, v, w$  - компоненты возмущения вектора скорости  $(V, 0, 0)$ ), описывается уравнением с соответствующим линеаризованным граничным условием на поверхности жидкости

$$\Delta\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t)\exp(\varepsilon t)\delta(x)\delta(y)\delta(z+H), \quad z < 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Phi + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\Delta$  - трехмерный оператор Лапласа, а  $\delta(x)$  - дельта функция Дирака.

Решение задачи (1.1) ищется в виде  $\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t)\exp(\varepsilon t)\varphi(x, y, z)$ , где функция  $\varphi(x, y, z)$  определяется из задачи

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z+H), \quad z < 0$$

$$\left(i\omega + \varepsilon + V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\varphi + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

Фурье-образ потенциала  $\varphi(x, y, z)$

$$\Omega(\mu, \nu, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mu x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu y) \varphi(x, y, z) dy$$

определяется из краевой задачи

$$\frac{\partial^2\Omega(\mu, \nu, z)}{\partial z^2} - k^2\Omega(\mu, \nu, z) = \delta(z+H), \quad z < 0$$

$$(i\omega + \varepsilon - i\mu V)^2 \Omega(\mu, \nu, z) + g \frac{\partial \Omega(\mu, \nu, z)}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

$$\Omega(\mu, \nu, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2$$

решение которой в области  $-H < z < 0$  имеет вид

$$\Omega(\mu, \nu, z) = -\frac{(\omega - \mu V)^2 \operatorname{sh}(kz) + gk \operatorname{ch}(kz)}{k \exp(kH) ((\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk)}$$

Возвышение свободной поверхности  $\eta(x, y, t)$  связано с потенциалом  $\Phi(x, y, z, t)$  условием

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi(x, y, z, t) = \\ &= \frac{-\exp(i\omega t + \varepsilon t)}{g} \left( i(\omega - i\varepsilon) \varphi(z, y, z) + V \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} \right), z = 0 \end{aligned}$$

Тогда Фурье образ  $\Lambda(\mu, \nu, t)$  функции  $\eta(x, y, t)$  имеет вид

$$\Lambda(\mu, \nu, t) = \frac{i(\omega - \mu V) \exp(i\omega t) \exp(-kH)}{(\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk}$$

В этом выражении параметр  $\varepsilon$  сохранен только в знаменателе, это нужно для определения смещения полюса подынтегрального выражения относительно действительной оси (в верхнюю или нижнюю полуплоскость). Тогда, проводя обратное преобразование Фурье, можно получить

$$\eta(x, y, t) = \frac{i \exp(i\omega t)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \mu V) \exp(-kH - i\mu x) d\mu}{(\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk} \quad (2)$$

В полярных координатах:  $(x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha), (\mu = k \cos \psi, v = k \sin \psi)$ , выражение (2) можно представить в виде

$$\eta(r, \alpha, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\infty} \frac{(\omega - kV \cos \psi) k \exp(-kH - ikr \cos(\psi - \alpha))}{(\omega - i\varepsilon - kV \cos \psi)^2 - gk} dk \quad (3)$$

Внутренний интеграл в (3) вычисляется с помощью теоремы о вычетах. Для этого необходимо определить полюса подынтегрального выражения, которые являются корнями дисперсионного уравнения

$$(\omega - kV \cos \psi)^2 = gk \quad (4)$$

$$k_{1,2}(\psi) = \frac{g}{2V^2 \cos^2 \psi} (1 + 2m \cos \psi \mp \sqrt{1 + 4m \cos \psi}), \quad m = \frac{V\omega}{g}$$

где знак “-“ соответствует корню  $k_1$ , а знак “+” соответствует корню  $k_2$ . Далее будем рассматривать случай, для которого дисперсионное уравнение (4) имеет два действительных положительных корня при любых значениях  $\psi$ . Для этого необходимо выполнение условия  $m < 1/4$ . Методом возмущений можно показать, что при  $\varepsilon > 0$  корень  $k_1(\psi)$  смещен в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости  $k$  для любых значений  $\psi$ . Корень  $k_2(\psi)$  смещен в нижнюю полуплоскость при  $\cos \psi > 0$ , и в верхнюю полуплоскость при  $\cos \psi < 0$ . На рис.1,2 изображены соответственно дисперсионные кривые  $k_1(\psi)$ ,  $k_2(\psi)$  в плоскости  $(v, \mu)$ . Здесь и далее все численные расчеты проводились для следующих параметров:  $V = 2.4 \text{ м/с}$ ,  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ ,  $m = 0.245$ .

Рассмотрим вначале вклад корня  $k_1(\psi)$  в выражение (3) для  $\eta(r, \alpha, t)$ . Функция  $\eta(r, \alpha, t)$  является четной по аргументу  $\alpha$ , поэтому далее будем считать, что  $0 < \alpha < \pi$ . Повернем контур интегрирования по переменной интегрирования  $k$  на  $\pi/2$  против часовой стрелки при условии, что  $\cos(\psi - \alpha) < 0$ , вычет в этом случае не учитывается, интеграл по мнимой оси имеет порядок  $O(1/r^2)$  при  $r \rightarrow \infty$ . При  $\cos(\psi - \alpha) > 0$  контур интегрирования поворачивается на  $\pi/2$  по часовой стрелке, и, учитывая вычет, можно получить

$$\eta_1(r, \alpha, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2+\alpha} B(k_1(\psi), \psi) \exp(-ik_1(\psi)r \cos(\psi - \alpha)) d\psi$$

$$B(k, \psi) = \frac{(\omega - kV \cos \psi) k \exp(-kH)}{2V \cos \psi (\omega - kV \cos \psi) + g}$$

Далее рассмотрим вклад корня  $k_2(\psi)$  в выражение (3) для  $\eta(r, \alpha, t)$ . В случае  $\cos(\psi - \alpha) < 0$  контур интегрирования поворачивается на  $\pi/2$  против часовой стрелки. Интеграл по мнимой оси имеет порядок  $O(1/r^2)$  при  $r \rightarrow \infty$ , вычет дает вклад лишь при  $\cos \psi < 0$ , в результате можно получить

$$\eta_2(r, \alpha, t) = -\frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} B(k_2(\psi), \psi) \exp(-ik_2(\psi)r \cos(\psi - \alpha)) d\psi$$

В случае  $\cos(\psi - \alpha) > 0$  контур интегрирования поворачивается на  $\pi/2$  по часовой стрелке. Вычет дает вклад при  $\cos \psi > 0$ , интеграл по мнимой оси также имеет порядок  $O(1/r^2)$  при  $r \rightarrow \infty$ , в результате имеем

$$\eta_3(r, \alpha, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} B(k_2(\psi), \psi) \exp(-ik_2(\psi)r \cos(\psi - \alpha)) d\psi$$

Тогда возвышение свободной поверхности представимо в виде суммы трех слагаемых

$$\begin{aligned} \eta(r, \alpha, t) &= \eta_1(r, \alpha, t) + \eta_2(r, \alpha, t) + \eta_3(r, \alpha, t) = \\ &= \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} (J_1(r, \alpha) + J_2(r, \alpha) + J_3(r, \alpha)) \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение интегралов  $J_1(r, \alpha), J_2(r, \alpha), J_3(r, \alpha)$ , описывающих полное волновое поле поверхностных возмущений вдали от пульсирующего источника, то есть при больших значениях  $r$ . Оценим сначала интеграл  $J_1(r, \alpha)$ . Фазовая функция  $q(\psi, \alpha) = k_1(\psi)r \cos(\psi - \alpha)$  имеет на интервале интегрирования  $(-\pi/2 + \alpha, \pi/2 + \alpha)$  единственную стационарную точку при любом  $-\pi < \alpha < \pi$ , которая определяется из уравнения  $\frac{\partial q(\psi, \alpha)}{\partial \psi} = 0$ ,

или  $\frac{k_1(\psi) \operatorname{tg} \psi - k_1'(\psi)}{k_1'(\psi) \operatorname{tg} \psi + k_1(\psi)} = \operatorname{tg} \alpha$ . Обозначим эту стационарную точку через  $\psi_0(\alpha)$ .

Можно показать, что  $\frac{\partial^2 q(\psi_0(\alpha), \alpha)}{\partial \psi^2} > 0$  при всех значениях  $\alpha$ . Тогда

асимптотика интеграла  $J_1(r, \alpha)$  вычисляется с помощью метода стационарной фазы и имеет вид

$$J_1(r, \alpha) = \sqrt{2\pi} \left( r \frac{\partial^2 q(\psi, \alpha)}{\partial \psi^2} \right)^{-1/2} B(k_1(\psi), \psi) \exp(i(rq(\psi, \alpha) + \pi/4)), \psi = \psi_0(\alpha) \quad (5)$$

Интегралу  $J_1(r, \alpha)$  соответствуют кольцевые волны на свободной поверхности жидкости, расходящиеся от пульсирующего источника возмущений. На фиг.3

представлена волновая картина поверхностных возмущений - рассчитанная по (51) функция  $Re J_1(r, \alpha)$ , глубина залегания источника  $H = 5$  м.

Рассмотрим далее интеграл  $J_3(r, \alpha)$ . Обозначим  $A = \arctg \Theta$ , где  $\Theta$  максимальное значение по  $\psi$  на интервале  $(-\pi/2, 0)$  выражения

$$\frac{k_2(\psi) \operatorname{tg} \psi - k_2'(\psi)}{k_2'(\psi) \operatorname{tg} \psi + k_2(\psi)}$$

Значение  $A$  определяет границы волнового клина (клина Кельвина), которые описываются уравнением  $y = \pm x \operatorname{tg} A$ , и в рассматриваемом случае  $\operatorname{tg} A = 0.284$ . Тогда фазовая функция  $q(\psi, \alpha) = k_2(\psi) r \cos(\psi - \alpha)$  на интервале интегрирования  $(-\pi/2 + \alpha, \pi/2)$  при  $\alpha < A$  имеет две стационарные точки  $\psi_1(\alpha)$  и  $\psi_2(\alpha)$  ( $\psi_1(\alpha) < \psi_2(\alpha)$ ), при  $\alpha > A$  - ни одной, и при  $\alpha = A$  стационарные точки сливаются ( $\psi_1(A) = \psi_2(A)$ ). Внутри волнового клина поле может быть рассчитано методом стационарной фазы, при этом вклад дают обе стационарные точки  $\psi_1(\alpha)$  и  $\psi_2(\alpha)$ , и вне волнового клина поле экспоненциально мало. Однако, в отличие от интеграла  $J_1(r, \alpha)$ , асимптотика, рассчитанная по методу стационарной фазы, не является равномерной, так как  $\frac{\partial^2 q(\psi_1(A), A)}{\partial \psi^2} = 0$ . Поэтому в окрестности границы волнового клина Кельвина

асимптотика, рассчитанная по методу стационарной фазы неприменима.

Равномерная асимптотика интеграла  $J_3(r, \alpha)$  для больших значений  $r$ , пригодная для всех значений  $0 < |\alpha| < \pi$  имеет вид

$$J_3(r, \alpha) = \frac{2\pi \exp(ir\lambda(\alpha))}{r^{1/3}} (0.5(F(\sqrt{\sigma(\alpha)}) + F(-\sqrt{\sigma(\alpha)})) Ai(r^{2/3}\sigma(\alpha)) -$$

(6)

$$- i \frac{(F(\sqrt{\sigma(\alpha)}) - F(-\sqrt{\sigma(\alpha)}))}{2r^{1/3}\sqrt{\sigma(\alpha)}} Ai'(r^{2/3}\sigma(\alpha)))$$

$$\lambda(\alpha) = (q(\psi_1(\alpha), \alpha) + q(\psi_2(\alpha), \alpha)) / 2$$

$$\sigma(\alpha) = (3(q(\psi_2(\alpha), \alpha) - q(\psi_1(\alpha), \alpha)) / 4)^{2/3}$$

$$F(\sqrt{\sigma(\alpha)}) = f_2(\alpha) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{T_2(\alpha)}}, \quad F(-\sqrt{\sigma(\alpha)}) = f_2(\alpha) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{T_1(\alpha)}}$$

$$f_j(\alpha) = B(k_2(\psi_j(\alpha), \alpha), \psi_j(\alpha)), \quad T_j(\alpha) = \frac{\partial^2 q(\psi_j(\alpha), \alpha)}{\partial \psi^2}, \quad j = 1, 2$$

где  $Ai(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau t - t^3/3) dt$  - функция Эйри,  $Ai'(\tau)$  - производная функции Эйри

. Неравномерная асимптотика получается из (6) если функцию Эйри и ее производную заменить на их разложения при больших значениях аргумента.

На рис.4 представлена волновая картина корабельных (клиновидных) волн, то есть рассчитанная по (6) действительная часть функции  $Re J_3(r, \alpha)$ , глубина залегания источника  $H = 0.5 м$ . Интеграл  $J_2(r, \alpha)$ , которому на рис.2 соответствует нижняя часть дисперсионной кривой  $k_2(\psi)$ , исследуется

аналогично. На рис.5 представлена волновая картина, описываемая функцией  $ReJ_2(r, \alpha)$ , рассчитанной по формуле, аналогичной (6), с той же глубиной залегания источника. В данном случае тангенс угла полураствора волнового клина (клина Кельвина)  $tgA = 0.836$ . На рис.6 приведена волновая картина поверхностных возмущений, отвечающая сумме двух слагаемых  $Re(J_2(r, \alpha) + J_3(r, \alpha))$ .

Таким образом, показано, что дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего локализованного источника в потоке тяжелой жидкости бесконечной глубины представляют собой систему волн двух типов: кольцевых и клиновидных (корабельных). Нестационарность амплитуды источника возмущений приводит к появлению кольцевых волн, расходящихся по поверхности жидкости непосредственно от источника. Кроме того, вклад в полное поверхностное возмущение вносят в данном случае две клиновидные (корабельные) волны, каждая из которых заключена внутри соответствующего клина Кельвина. Построенные асимптотические решения позволяют описывать дальние поля поверхностных возмущений от локализованного нестационарного источника как вне, так и внутри соответствующих волновых клиньев. Полученные асимптотики дальних полей поверхностных волновых возмущений дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики поверхностных возмущений реальных природных сред.

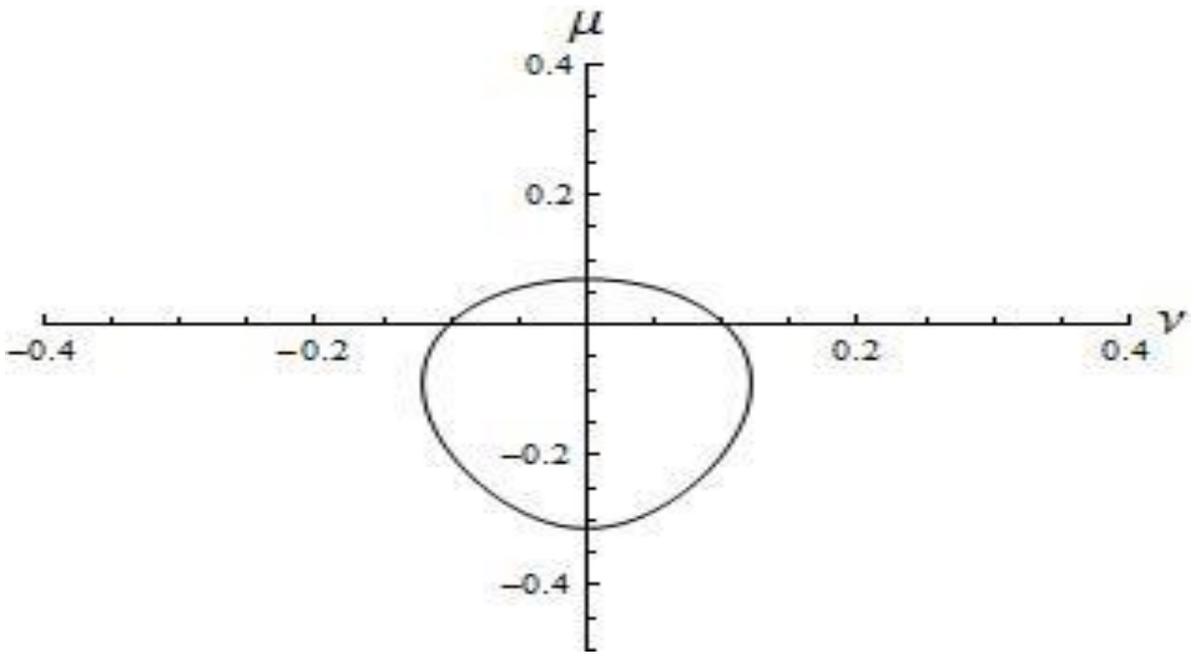


Рис. 1. Дисперсионная кривая  $k_1(\psi)$

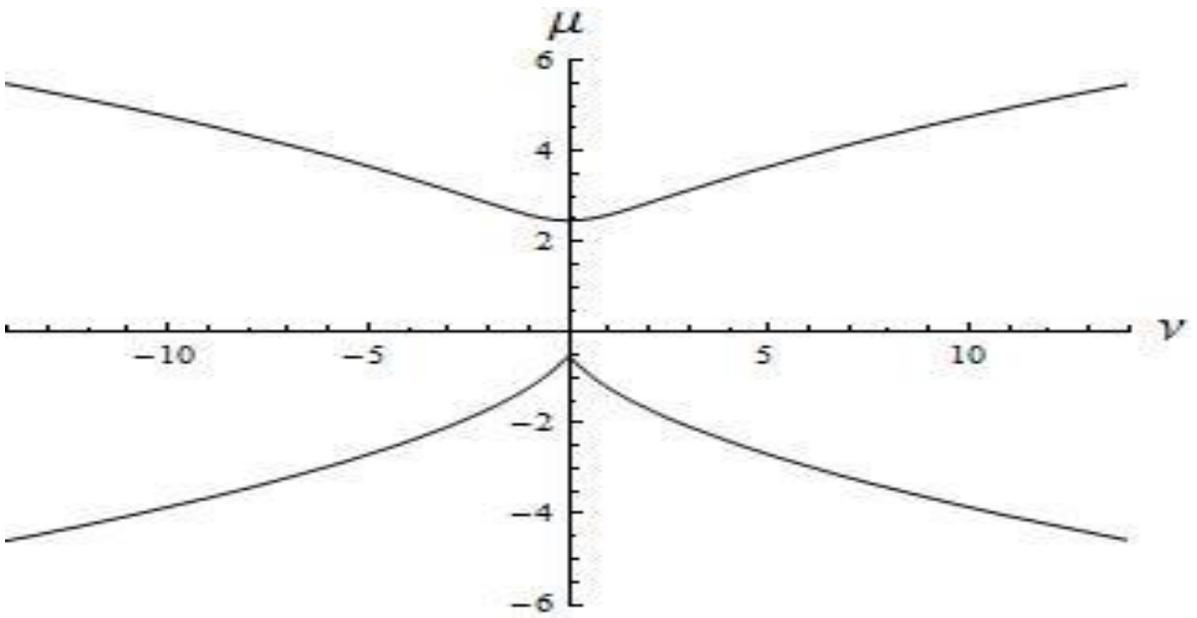


Рис. 2. Дисперсионная кривая  $k_2(\psi)$

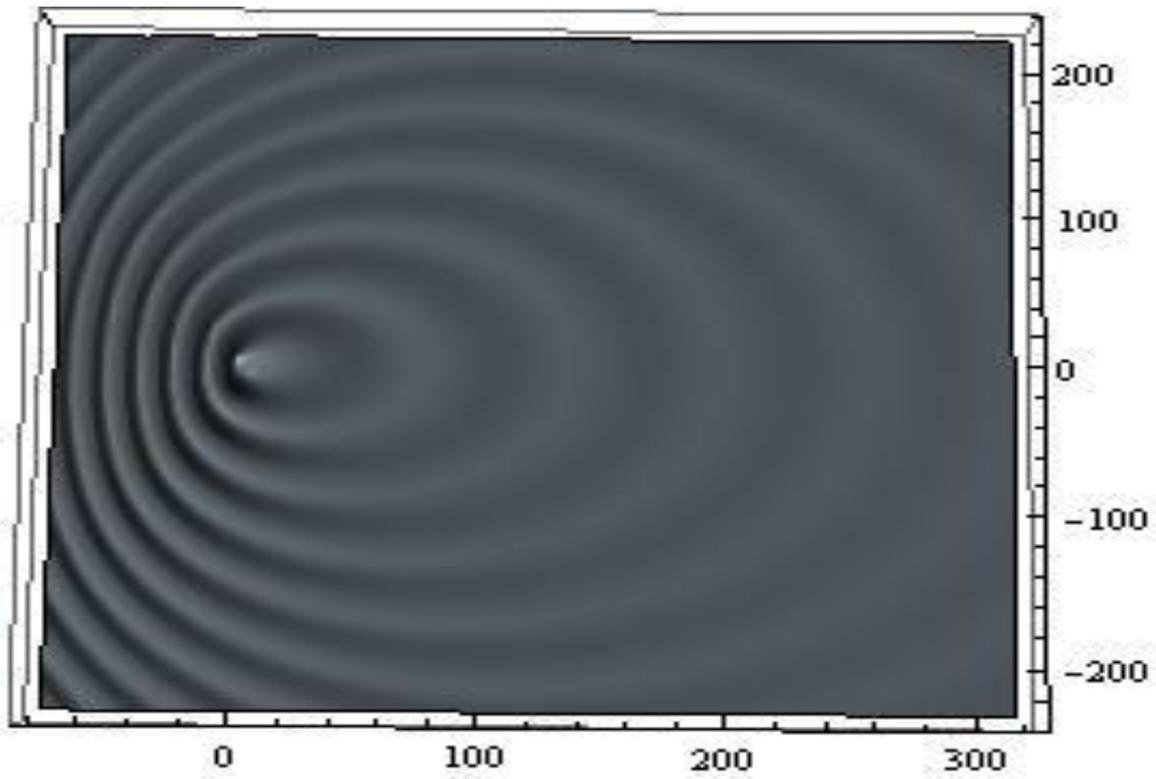


Рис. 3. Кольцевые волны, соответствующие  $Re J_1(r, \alpha)$

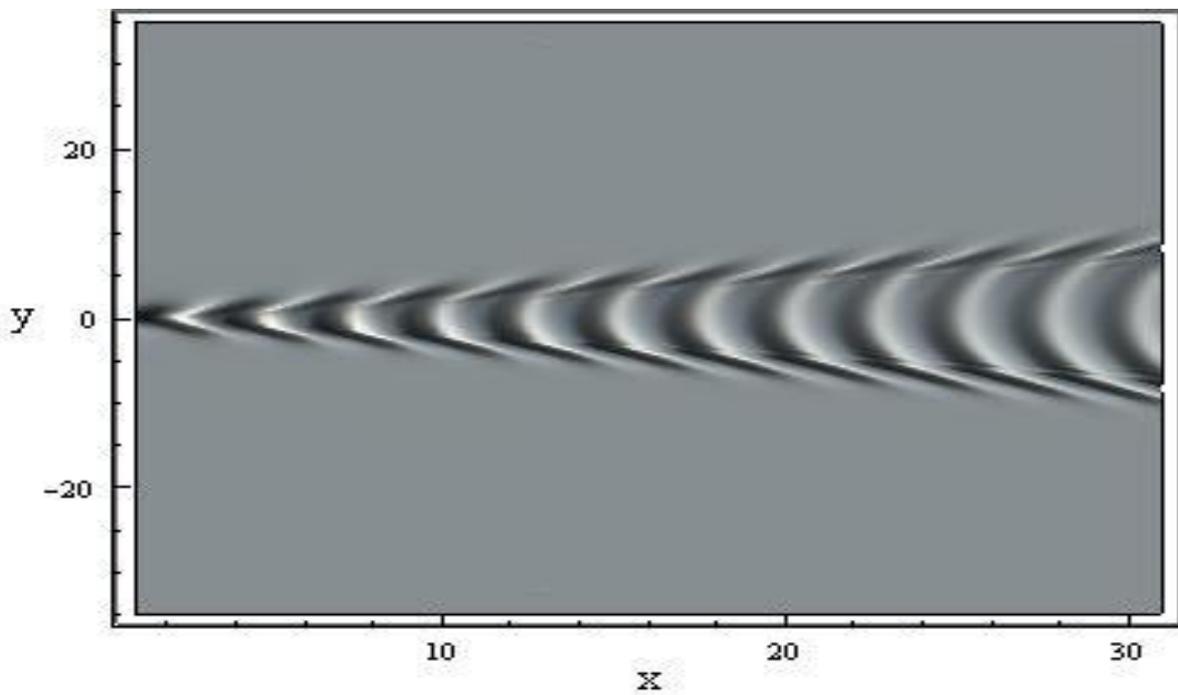


Рис. 4. Корабельные волны, соответствующие  $Re J_3(r, \alpha)$

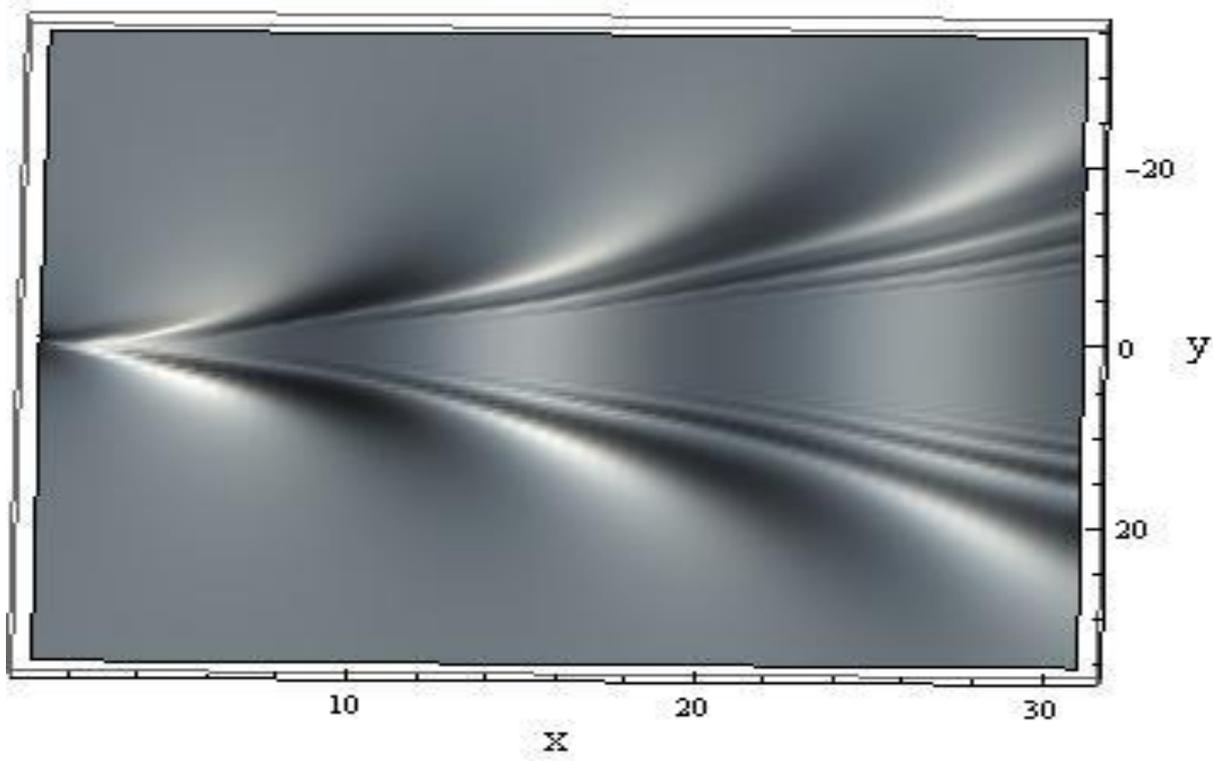


Рис. 5. Корабельные волны, соответствующие  $\text{Re} J_2(r, \alpha)$

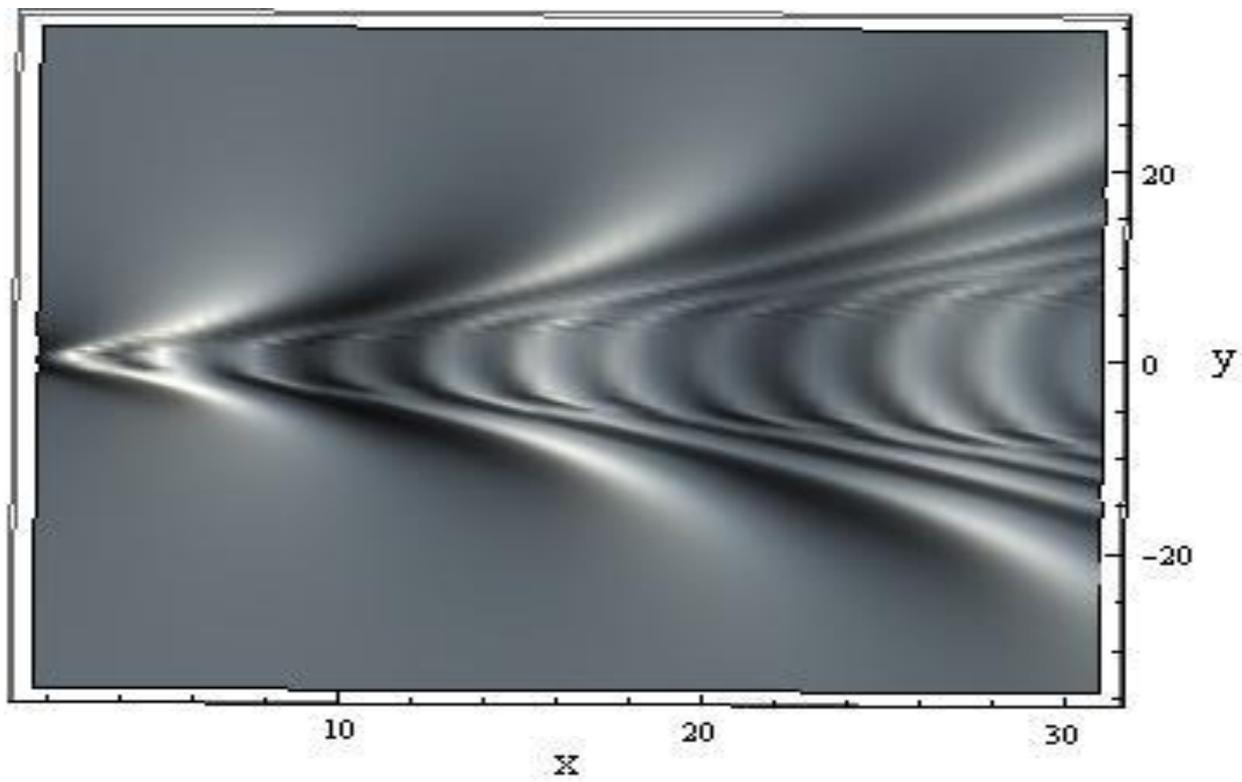


Рис. 6. Сумма двух корабельных волн  $\text{Re}(J_2(r, \alpha) + J_3(r, \alpha))$

**7. ГИБРИДНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ОТ  
ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ**



Поверхностные волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин (ветровое волнение, обтекание подводных препятствий, изменения рельефа дна, полей плотности и течений), так и порождаться обтеканием искусственных препятствий (платформ, подводных трубопроводов, сложных гидротехнических сооружений). Система уравнений гидродинамики, описывающая поверхностные возмущения в общем виде представляет достаточно сложную математическую задачу как в плане доказательств теорем существования и единственности решений в соответствующих функциональных классах, так и с вычислительной точки зрения. В рамках линейной теории для аналитического исследования поверхностных волновых возмущений используются методы интегрального представления Маслова, приближенные методы геометрической оптики, а в некоторых случаях также уравнения в конформных переменных. Основные результаты решений задач о генерации поверхностных волновых возмущений представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки асимптотических методов их анализа, допускающих качественный анализ и проведение экспресс оценок получаемых решений. Кроме того, для анализа данных дистанционного зондирования морской поверхности необходимы знания причин, вызывающие те или иные поверхностные явления. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой поверхностных возмущений неоднородных и нестационарных природных сред, необходимо исходить из

достаточно развитых математических моделей. Трехмерность структуры поверхностного морского волнения также играет существенную роль, и в настоящее время не имеется возможность проведения масштабных вычислительных экспериментов по моделированию трехмерных океанических течений на больших временах с достаточной точностью. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге волновых явлений можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. В этой связи необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых источниками различной природы в тяжелой однородной жидкости. В частности для некоторых параметров генерации поверхностных волн гармоническим локальным источником возмущений были рассчитаны границы волновой зоны и поле возвышения методом стационарной фазы. Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления поверхностных волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред. Также ряд результатов асимптотического анализа линейных задач, описывающих различные режимы возбуждения и распространения поверхностных возмущений, лежат в основе активно развивающейся в настоящее время нелинейной теории генерации океанических волн экстремально большой амплитуды – волн-убийц. Рассматривались также задачи о построении равномерных асимптотик дальних полей внутренних и

поверхностных возмущений от движущегося стационарного источника. Поэтому представляет интерес рассмотрение более сложных режимов генерации поверхностных волн, обусловленных нестационарностью источника возмущений. В настоящем разделе изложена задача построения равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых при обтекании локализованного гармонического источника возмущений потоком тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины.

Рассматривается задача об обтекании гармонического источника возмущений интенсивности  $q = Q \exp(i\omega t)$  однородным потоком бесконечно глубокой тяжелой жидкости, имеющим вдали от источника скорость  $V$ . Источник расположен на глубине  $h$  относительно невозмущенного положения свободной поверхности, т.е. в точке  $(0, 0, -h)$ . Для того, чтобы найти физически реализуемое решение задачи необходимо заменить частоту  $\omega$  на  $\omega - i\varepsilon$ , и далее устремить  $\varepsilon$  к нулю в найденном решении для возвышения свободной поверхности. Пусть далее  $\Omega(x, y, z, t)$  - потенциал возмущений скорости относительно однородного потока. В рамках линейной теории для определения  $\Omega$  имеем следующую задачу

$$\Delta \Omega(x, y, z, t) = Q \exp(i(\omega - i\varepsilon)t) \delta(x) \delta(y) \delta(z + h), \quad z < 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Omega + g \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \tag{1}$$

здесь  $\Delta$  - трехмерный оператор Лапласа, а  $\delta(x)$  - дельта функция Дирака.

Возвышение свободной поверхности  $H(x, y, t)$  определяется из интеграла Коши-Лагранжа

$$H(x, y, t) = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \Omega(x, y, z, t), \quad z=0 \quad (2)$$

Решение (1)-(2) ищется в виде

$$\Omega(x, y, z, t) = \exp(i(\omega - i\varepsilon)t) \varphi(x, y, z)$$

$$H(x, y, t) = \exp(i(\omega - i\varepsilon)t) \eta(x, y)$$

В безразмерных переменных  $x_* = gxV^{-2}$ ,  $y_* = gyV^{-2}$ ,  $z_* = gzV^{-2}$ ,  $h_* = ghV^{-2}$ ,

$\omega_* = V\omega/g$ ,  $t_* = gt/V$ ,  $\varepsilon_* = V\varepsilon/g$ ,  $\varphi_* = V^2\varphi/Qg$ ,  $\eta_* = V^3\eta/Qg$  для

определения функций  $\varphi_*(x_*, y_*, z_*)$ ,  $\eta_*(x_*, y_*)$  будем иметь следующую

задачу (нижний индекс «\*» далее опускается)

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z+h), \quad z < 0 \quad (3)$$

$$\left(i\omega + \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

$$\eta(x, y) = -\left(i\omega + \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi, \quad z = 0 \quad (4)$$

Представим функции  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\eta(x, y)$  в виде двойных интегралов Фурье

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\mu x) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) f(\mu, \nu, z) d\nu \quad (5)$$

$$\eta(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\mu x) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) \Lambda(\mu, \nu) d\nu \quad (6)$$

Подставляя (5) в (3) получаем следующую краевую задачу

$$\frac{\partial^2 f(\mu, \nu, z)}{\partial z^2} - (\mu^2 + \nu^2) f(\mu, \nu, z) = \delta(z + h), \quad z < 0 \quad (7)$$

$$(i\omega + \varepsilon - i\mu)^2 f(\mu, \nu, z) + \frac{\partial f(\mu, \nu, z)}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

Решение задачи (7) в области  $-h < z < 0$  имеет вид

$$f(\mu, \nu, z) = -\frac{(\omega - \mu)^2 \operatorname{sh}(kz) + k \operatorname{ch}(kz)}{k \exp(kh) ((\varepsilon + i(\omega - \mu))^2 + k)}, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2$$

Функция  $\Lambda(\mu, \nu)$  определяется из (4)

$$\Lambda(\mu, \nu) = \frac{i(\omega - \mu) \exp(-kh)}{(\varepsilon + i(\omega - \mu))^2 + k} \quad (8)$$

Нули знаменателя в (8) определяют дисперсионное соотношение:

$(\omega - \mu)^2 = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ , которое можно записать в явном виде

$$\nu(\mu) = \pm \sqrt{(\omega - \mu)^4 - \mu^2} \quad (9)$$

Множество частот  $\omega > 0$  разбивается двумя характерными значениями  $\omega_1 = 0.25$  и  $\omega_2 = \sqrt{6}/9$  на три интервала. При  $\omega < \omega_1$  дисперсионная кривая (9) состоит из трех ветвей: одной замкнутой и двух незамкнутых. Тогда волновая картина представляет собой сумму двух корабельных (продольных) волн с углом полураствора волнового клина, меньшим  $\pi/2$ , и кольцевых (поперечных) волн вокруг источника. При  $\omega > \omega_2$  дисперсионная кривая (9) состоит из двух разомкнутых ветвей без экстремумов. В этом случае волновая картина есть сумма двух корабельных волн с углом полураствора волнового клина, меньшим  $\pi/2$ . Если  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ , то дисперсионная кривая (9) состоит из двух разомкнутых кривых, одна из которых имеет два локальных экстремума. Одна ветвь дисперсионной кривой отвечает обычным корабельным волнам с углом полураствора волнового клина, меньшим  $\pi/2$ , а вторая ветвь - корабельным волнам с углом полураствора волнового клина, большим  $\pi/2$ .

(волновой фронт направлен от источника вверх по потоку). Эта система гибридных волн одновременно сочетает в себе черты как кольцевых (поперечных), так и корабельных (продольных) волн. Далее будет рассматриваться этот случай ( $\omega = 0.255$ ).

На рис. 1 изображена ветвь дисперсионной кривой (9) (обозначаемая далее  $v_1(\mu)$ ), описывающая гибридные волны. На рис. 2 изображена ветвь дисперсионной кривой (9) (обозначаемая далее  $v_2(\mu)$ ), описывающая корабельные волны. При  $\varepsilon > 0$  и  $\mu < \omega$  имеем  $\text{Im}v_1(\mu) < 0$ , а для  $\mu > \omega$  -  $\text{Im}v_2(\mu) > 0$ . Тогда, вычисляя внутренний интеграл в (6) путем замыкания контура интегрирования по переменной  $v$  при  $y > 0$  в нижнюю полуплоскость (полюса  $v_1(\mu)$  и  $-v_2(\mu)$ ), а при  $y < 0$  в верхнюю полуплоскость (полюса  $-v_1(\mu)$  и  $v_2(\mu)$ ), можно получить

$$\eta(x, y) = I_1(x, y) + I_2(x, y)$$

$$I_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^C \frac{E}{v_1(\mu)} \exp(-i(\mu x + v_1(\mu)|y|)) d\mu$$

$$I_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_D^{\infty} \frac{E}{v_2(\mu)} \exp(-i(\mu x - v_2(\mu)|y|)) d\mu$$

$$E = (\omega - \mu)^3 \exp(-(\omega - \mu)^2 h)$$

где  $C$  и  $D$  – абсциссы крайней правой и крайней левой точки дисперсионных кривых  $v_1(\mu)$  и  $v_2(\mu)$  на рис. 1 и рис. 2, соответственно. Точки  $A$  и  $G$  – точки

перегиба дисперсионных кривых  $v_1(\mu)$  и  $v_2(\mu)$  на рис. 1 и рис. 2, соответственно.

Интегралы  $I_2(x, y)$  с соответствующей дисперсионной зависимостью  $v_2(\mu)$ , описывающие обычные корабельные волны, подробно рассмотрены. Более сложная и ранее не исследованная волновая картина амплитудно-фазовых характеристик гибридных поверхностных волновых возмущений описывается интегралами  $I_1(x, y)$ . Введем обозначение для фазы:  $\Phi = v_1(\mu)|y| + \mu x$ . Тогда, используя условие стационарности фазы в виде

$$\frac{dv_1(\mu)}{d\mu} = -\frac{x}{|y|} \quad (10)$$

получим семейство линий постоянной фазы с параметром  $\mu$  (нижний индекс «1» опускается)

$$x = -\frac{\Phi v'(\mu)}{v(\mu) - \mu v'(\mu)}, \quad |y| = \frac{\Phi}{v(\mu) - \mu v'(\mu)} \quad (11)$$

На рис. 3 изображены линии равной фазы для различных значений  $\Phi$  с шагом  $2\pi$ . Части дисперсионной кривой от точки  $C$  до точки перегиба  $A$  соответствуют кольцевые (поперечные) волны, и совокупность угловых точек возврата образуют волновой фронт вверх по потоку, изображенный на рис. 3 пунктирной линией. Для определения волнового фронта необходимо к

уравнениям (11) добавить условие:  $\frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial |y|}{\partial \Phi} - \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial |y|}{\partial \mu} = 0$ , или, что то же самое:

$\frac{d^2v(\mu)}{d\mu^2} = 0$ , где абсцисса  $\mu_A$  точки  $A$  является решением данного уравнения.

Тогда уравнение для определения фронта будет иметь вид:  $x = -v'(\mu_A)|y|$ , и соответствующий угол полураствора волнового клина равен  $105^{\circ}7'$ . Части дисперсионной кривой от точки  $A$  до точки  $B$  соответствуют продольные гребни волн, идущие от фронта до бесконечности (изображены на рис. 3 левее штриховой линии). Штриховая линия на рис.3 соответствует гребню волны с фазой  $\Phi = 0$  и описывается уравнением:  $x = -v'(\mu_B)|y|$ , или  $x = \sqrt{16\omega^2 - 1}|y|$ , где  $\mu_B$  – корень уравнения  $v(\mu) = \mu v'(\mu)$ , решением которого является  $\mu_B = -\omega$ ,  $v'(\mu_B) = -\sqrt{16\omega^2 - 1}$ . Части дисперсионной кривой левее точки  $B$  соответствуют продольные волновые гребни, распространяющиеся из бесконечности в начало координат (правее штриховой линии на рис. 3). На этом рисунке фазы  $\Phi$ , соответствующие участку дисперсионной кривой правее точки  $B$ , имеют значения  $2\pi n, n = 1, 2, 3, 4$ , а левее точки  $B$  - значения  $2\pi n, n = -11, -10, \dots, -1$ . На бесконечности (при больших значениях  $x, |y|$ ) уравнения гребней продольных волн имеют вид:  $x = \sqrt{16\omega^2 - 1}|y| - 2\pi k / \omega$ , где  $k$  - целое число, т.е. эти гребни являются гребнями плоской волны с длиной  $\lambda = \pi\omega^{-2} \approx 24$ . Длина волны кольцевых (поперечных волн) в направлении оси  $x$  равна  $\lambda = 2\pi / C \approx 142$ , т.е. примерно в 6 раз больше длины клиновидных (продольных) волн.

Интеграл  $I_1(x, y)$  принадлежит к классу интегралов, имеющих две стационарные точки. На фронте волны (пунктирная линия на рис. 3) стационарные точки, определяемые условием (10), сливаются. Равномерная асимптотика  $I_1(x, y)$  при больших значениях  $|y|$  имеет вид

$$I_1(x, y) = \frac{T^+(\rho)}{|y|^{1/3}} Ai(|y|^{2/3} \sigma(\rho)) \exp(-i|y|a(\rho)) -$$

(12)

$$-i \frac{T^-(\rho)}{|y|^{2/3} \sqrt{\sigma(\rho)}} Ai'(|y|^{2/3} \sigma(\rho)) \exp(-i|y|a(\rho))$$

$$T^\pm(\rho) = \frac{1}{2} \left( F(\mu_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\rho)}}{\theta(\mu_2, \rho)}} \pm F(\mu_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\rho)}}{\theta(\mu_1, \rho)}} \right)$$

$$F(\mu) = (\omega - \mu)^3 \exp(-h(\omega - \mu)^2) / v(\mu)$$

$$\sigma(\rho) = \left( \frac{3}{4} (S(\mu_2, \rho) - S(\mu_1, \rho)) \right)^{2/3}, \quad a(\rho) = \frac{1}{2} (S(\mu_2, \rho) + S(\mu_1, \rho))$$

$$S(v, \rho) = v(\mu) - \rho\mu, \quad \rho = -x/|y|, \quad \theta(v, \rho) = \frac{\partial^2 S(\mu, \rho)}{\partial \mu^2}$$

$$Ai(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau u - u^3/3) du$$

где  $\mu_1 = \mu_1(\rho)$  и  $\mu_2 = \mu_2(\rho)$  – корни уравнения  $\partial S(\mu, \rho) / \partial \mu = 0$ , при этом  $|\mu_1| < |\mu_2|$ ,  $Ai(\tau)$  – функция Эйри,  $Ai'(\tau)$  – производная функции Эйри.

Для того, чтобы получить выражение для возвышения свободной поверхности, необходимо выражение (12) умножить на  $\exp(i\omega t)$  и от полученного результата взять действительную часть. На рис. 4 изображена волновая картина возвышения свободной поверхности при  $t=10$  и  $h=3$ , рассчитанная по (12) в безразмерных координатах (в окрестности начала координат интеграл  $I_1(x, y)$  рассчитывался численно). При характерных для океанических условий значениях параметров  $Q = 10^3 \text{ м}^3 / \text{с}$ ,  $V = 3 \text{ м} / \text{с}$  амплитуды, возвышение составляет порядка 0,3 метра. Воспользовавшись асимптотиками функции Эйри и ее производной вдали от фронта, можно получить неравномерную асимптотику для  $I_1(x, y)$ , состоящую из двух слагаемых. Первое из этих слагаемых, соответствующее корню  $\mu_1$ , описывает клиновидные (продольные) волны, а второе, соответствующее корню  $\mu_2$ , описывает кольцевые (поперечные) волны.

Таким образом, показано, что дальние поля поверхностных возмущений от гармонического локализованного источника в потоке тяжелой жидкости бесконечной глубины при определенных режимах генерации представляют собой гибридную систему волн двух типов: кольцевых (поперечных) и клиновидных (продольных). Нестационарность амплитуды источника возмущений приводит к появлению не только кольцевых волн, расходящихся

по поверхности жидкости непосредственно от источника, но также к генерации гибридных поверхностных возмущений, распространяющихся от источника вверх по потоку. Полученные асимптотики дальних полей поверхностных волновых возмущений дают возможность эффективно рассчитывать основные амплитудно-фазовые характеристики возбуждаемых волновых полей, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики поверхностных возмущений реальных природных сред.

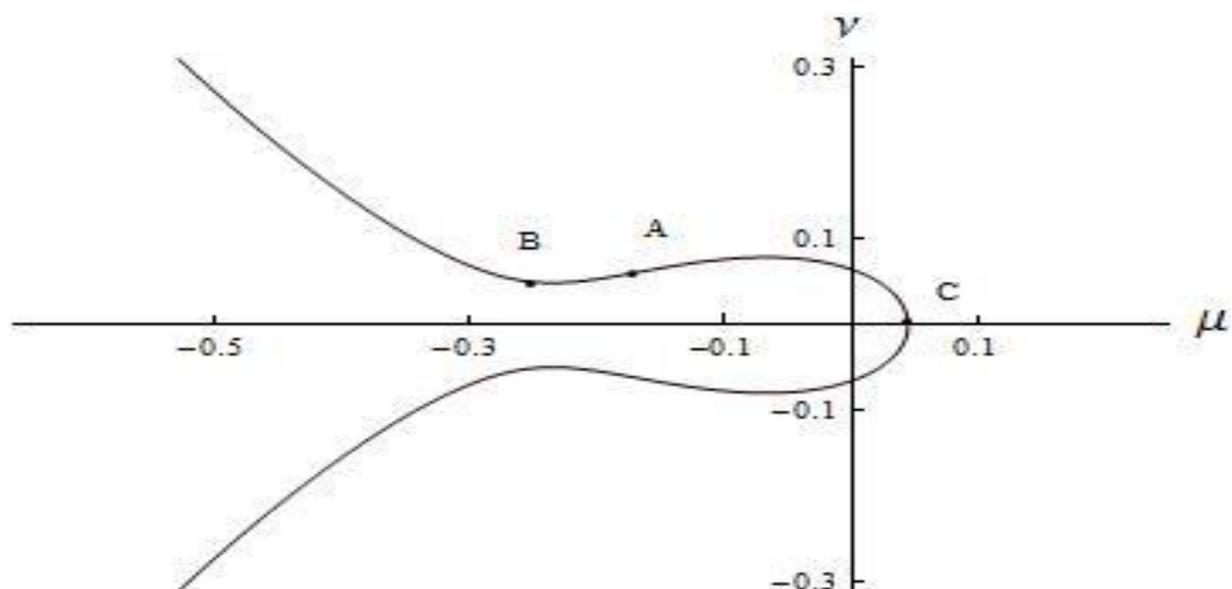


Рис. 1. Дисперсионная кривая  $v_1(\mu)$

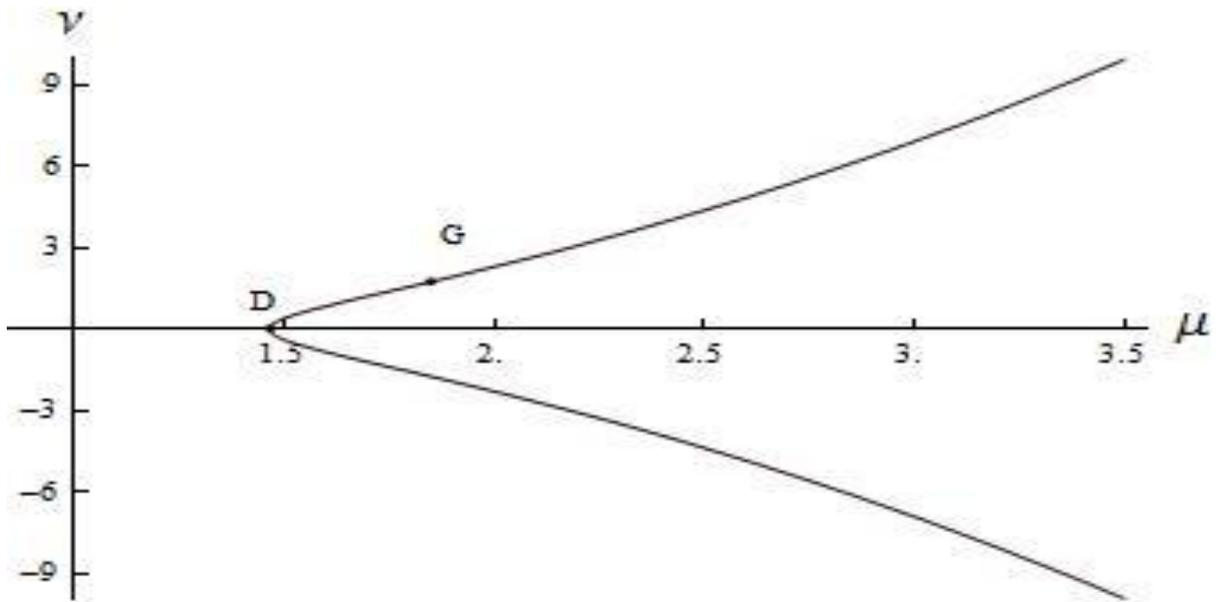


Рис. 2. Дисперсионная кривая  $v_2(\mu)$

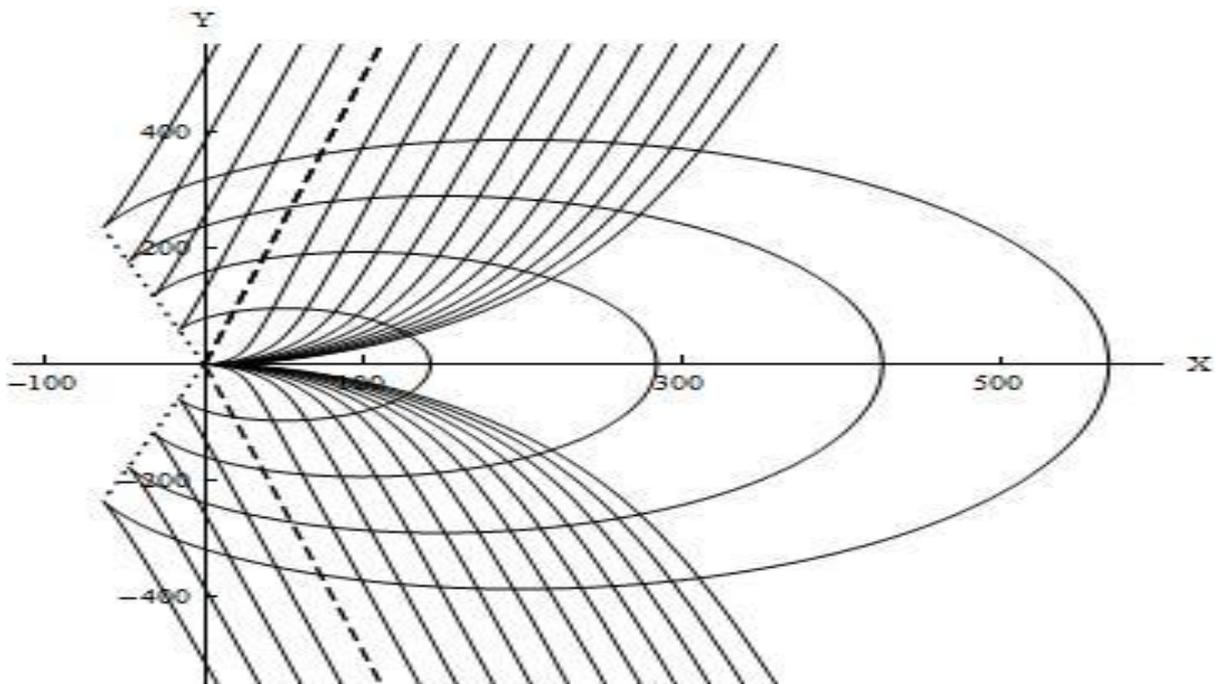


Рис. 3. Линии равной фазы

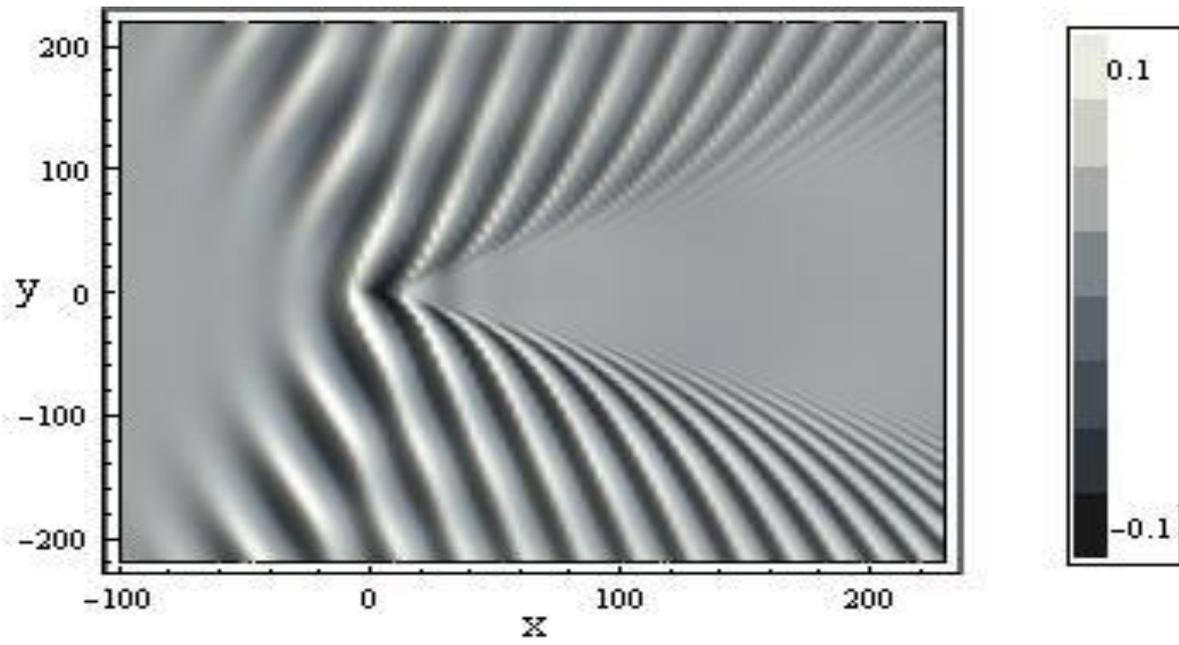


Рис. 4. Поле возвышения свободной поверхности

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**



В настоящее время наблюдается рост интереса к математическому моделированию волновых движений неоднородных природных стратифицированных сред, обусловленный проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, охраны и изучения окружающей среды, эксплуатации сложных гидротехнических сооружений, в том числе морских нефтедобывающих комплексов и рядом других актуальных задач науки и техники. Настоящая монография была посвящена изложению фундаментальных проблем волновой динамики природных стратифицированных сред. В книге были исследованы основные математические модели, описывающие процессы возбуждения и распространения пакетов внутренних и поверхностных гравитационных волн в стратифицированных по вертикали, неоднородных по горизонтали и нестационарных средах, изложены асимптотические методы, являющихся обобщением пространственно-временного лучевого метода (метода геометрической оптики). Значительное место в монографии было уделено сравнению получаемых аналитических результатов с данными натурных измерений гидрофизических полей в океане. Монография представляет несомненный интерес для специалистов в области гидрофизики, прикладной математики, математической физики, математического моделирования сложных сред, гидродинамики, океанологии.

Внутренние и поверхностные гравитационные волны в океане и атмосфере изучаются уже достаточно давно, и по данной тематике опубликовано

значительное число книг. Тем не менее, в последнее время интерес к ним в какой-то степени угасает, что можно судить по общему количеству публикаций, посвященных данной проблематике. Вместе с тем, сейчас возникают новые направления в исследованиях как внутренних, так и поверхностных волн, о которых ранее не говорилось. Во-первых, стало понятным, что в поле внутренних волн могут появляться аномально большие короткоживущие волны-убийцы, природа которых напоминает природу волн-убийц на поверхности моря. Во-вторых, сдвиговые течения во внутренних волнах приводят к большим изгибающим моментам на опоры нефтяных платформ, что уже приводило к существенной деформации подводных технологических конструкций, в ряде районов Мирового океана. Поэтому в настоящее время разрабатывается система мониторинга интенсивных внутренних и поверхностных волн в морских условиях, в какой-то мере аналогичная системе мониторинга цунами. В-третьих, внутренние волны способны вызвать транспорт донных наносов в глубоководных районах, где эффект поверхностных волн на дно минимален. Наконец, классические задачи воздействия внутренних волн на морскую поверхность по-прежнему остаются актуальными. Внутренние гравитационные волны, возникающие, например, при прохождении подводных течений через подводные хребты или при движении по континентальному шельфу, движутся вдоль термоклина (слоя максимального скачка плотности), расположенного на определенной глубине и отделяющего слой воды на поверхности океана от глубинных вод. Вектор

колебаний этих волн направлен вниз или вверх с периодом порядка десятков минут, и однажды возникнув, внутренние волны распространяются, сохраняя свою форму и силу, и способны пройти большие расстояния без затухания. Поэтому внутренние гравитационные волны играют важную роль в динамике океанических вертикальных и горизонтальных обменов, выполняют функцию транспортного средства, перенося биомассу и питательные вещества, так как их амплитуда сопоставима с глубиной поверхностного слоя океана.

Внутренние волны существуют в океане везде, где наблюдается стратификация плотности, и они играют важную роль во всей динамике океанических процессов, особенно в перемешивании и формировании океанической стратификации. Как уже отмечалось, внутренние волны пронизывают всю толщу океана и являются основным механизмом переноса энергии ветра с поверхности в глубину. В полярных районах формируются холодные водные массы высокой плотности, которые, погружаясь в глубинные слои, распространяются в Мировом океане. Солнечные лучи прогревают лишь верхний слой морской воды незначительной толщины. Поскольку в океане наблюдается в целом стационарное распределение плотности по вертикали, отличное от резко выраженного двуслойного, то можно полагать, что оно достигается в процессе медленного перемешивания. Этот физический механизм перемешивания определяется в основном энергией приливов и ветра, и поэтому роль внутренних приливов в вертикальных и горизонтальных океанических обменах является доминирующей. Качественные и аналитические оценки

переноса энергии, массы, количества движения, учет влияния внутренних гравитационных волн на процессы перемешивания в океане, изучение генерации, распространения, неустойчивости, разрушения внутренних и поверхностных волн – основные фундаментальные задачи современной физики океана.

Особый интерес к исследованию внутренних гравитационных волн связан с интенсивным освоением Арктики и ее природных богатств. Эти волны пока недостаточно изучены в Арктике, так как двигаются подо льдом и сверху практически не видны, однако доступная информация о движении подводных объектов свидетельствует об их наличии. Внутренние волны достигают льда и поднимают или опускают его с определенной периодичностью, что доступно наблюдению с помощью средств радиолокационного зондирования. Воздействие волн способно привести к расколу ледового покрытия в Арктике, и они способствуют движению айсбергов и различного рода загрязнений. Поэтому фундаментальные исследования волновой динамики в области Арктического бассейна является важной фундаментальной научной и практической задачей, в том числе для обеспечения безопасности при строительстве и эксплуатации морских нефте- и газодобывающих платформ.

Для прикладных океанологических, гидрофизических исследований, связанных с изучением динамики внутренних и поверхностных волн фундаментальной проблемой является моделирование волновой динамики с учетом реальной изменчивости параметров природных стратифицированных

сред. Промышленная деятельность на континентальном шельфе (в том числе в зоне Арктического бассейна), связанная с добычей ископаемых является важной причиной исследований внутренних и поверхностных волн в настоящее время. Их характеристики используются для оценки их воздействия на окружающую среду и технологические морские конструкции. Знания о волновой динамике важны для обеспечения безопасности при строительстве и эксплуатации морских платформ на континентальном шельфе, и для этих целей необходимо контролировать воздействие волн. При строительстве нефтяных платформ проводится систематическое измерение волн и течений, поэтому решение фундаментальных проблем моделирования волновой динамики позволит избежать дорогостоящих натурных измерений. Решение проблемы интерпретации результатов мониторинга морской поверхности, осуществляемого с помощью дистанционных аэрокосмических средств, имеет своей целью создание методов дистанционного аэрокосмического мониторинга поверхности, позволяющих прогнозировать возникновение катастрофических ситуаций, уточнять координаты скопления планктона и косяков рыб, отмечать различного рода экологические нарушения на участках протяженностью в сотни и тысячи километров; определять границы течений, исследовать топографию морского дна и фиксировать изменения подводного рельефа, дистанционно исследовать районы добычи полезных ископаемых.

Развитие дистанционных методов диагностики состояния водной поверхности Мирового океана требует глубокого изучения физических

механизмов рассеяния поверхностью океана на основе исследования динамики поверхностных гидродинамических образований, вызванных как ветровым волнением и приповерхностными течениями, так и расположенными в океане источниками возмущений. В свою очередь, на состояние свободной поверхности влияют находящиеся в толще воды неоднородности, например, обтекаемые преграды, изменения глубины океана. Так как среди факторов, оказывающих влияние на свободную поверхность моря, особое место занимают внутренние гравитационные волны, то одной из основных фундаментальных научных проблем является разработка методов, которые дают возможность аналитически и численно исследовать эффекты возбуждения отдельных частотных составляющих распространяющихся волновых цугов. Для правильной интерпретации данных, полученных при зондировании морской поверхности, нужно знать причины, вызывающие те или иные поверхностные явления. Поэтому в настоящее время остро встает вопрос о развитии методов математического моделирования процессов внутренних колебаний в океане и, в частности, согласования результатов моделирования с видимыми поверхностными волнениями.

Известно например, что в Баренцевом море, глубина которого составляет в районе Штокмановского газового месторождения 300-400 метров, наблюдаются внутренние волны амплитудой до 20 метров, кроме того существенную часть в вертикальные и горизонтальные обмены это района Мирового океана вносят дрейфующие айсберги. При моделировании внутренних и поверхностных волн

от подобного рода нелокальных источников возмущений необходимо учитывать особенности этих возмущающих факторов (подводные технологические и природные объекты), неоднородность гидрофизических полей и так далее. Безопасность морских технологических платформ требует исследования поведения гидрофизических полей и расчета нагрузок, которые могут быть оказаны на морские платформы. Существенной нагрузкой на подводные платформы является нагрузка от внутренних волн, которой ранее считала малой по сравнению с нагрузкой от ветровых волн и ветра. Однако внутренние волны могут влиять на подводные конструкции и приводить в частности, к деформации дна при прокладке протяженных трубопроводов.

Существует оценки, которые показывают, что например, для ряда районов Мирового океана (Южно – Китайское море, зона Арктического бассейна и других) влияние внутренних гравитационных волн на подводные платформы в десятки раз может превышать ветровые нагрузки. Задачи подобной сложности, как правило, допускает только прямое численное моделирование. Однако начальные данные для подобного рода расчетов известны приблизительно, что может привести к значительной потере точности получаемых результатов. Кроме того численный анализ не позволяет проводить качественные оценки получаемых результатов, что является необходимым при проведении, например, экспресс оценок результатов измерения волн в океане и атмосфере, в том числе методами дистанционного зондирования.

Как уже отмечалось, существует большое число работ, посвященных экспериментальному исследованию внутренних и поверхностных волн в искусственных стратифицированных средах. Однако специфика большинства лабораторных исследований не позволяет напрямую использовать получаемые результаты для реальных океанологических расчетов и оценок. Поэтому на первый план выдвигаются асимптотические методы исследований внутренних и поверхностных волн в природных стратифицированных средах - океан, атмосфера. Большинство теоретических работ (в силу существенных математических трудностей), посвященных исследованию динамики волн в природных стратифицированных средах, как правило, решены в двумерной постановке (вертикальная и одна из горизонтальных координат). При этом наиболее физически наглядным и интуитивно понятным является метод геометрической оптики (лучевой метод) и его модификации. Сложность применения лучевого подхода, помимо чисто математических проблем, заключается также в том, что в Мировом океане наблюдается многообразие пространственно-временных масштабов: масштабы вертикальной и горизонтальной изменчивости, нестационарности, изменчивости рельефа дна, сдвиговых течений и так далее. Поэтому учет многомасштабности асимптотических разложений при следовании полей внутренних волн должен являться предметом дальнейших исследований.

До настоящего времени с помощью геометро-оптических подходов удавалось, как правило, рассматривать динамику гармонических волновых

пакетов в океане с переменными параметрами, между тем наблюдаемые цуги внутренних волн, как правило, короткие и широкополосные, поэтому необходимо использовать разработанные основными исполнителями проекта модифицированные методы пространственно-временного лучевого анализа. В условиях мелководных шельфовых и прибрежных зон морских акваторий большой площади, окружающих территорию России актуальными являются фундаментальные задачи исследования влияния океанических параметров на наблюдаемые поверхностные волновые явления. В частности, касательное напряжение ветра, создаваемое движущимися ураганами, формирует в океане структуру в виде волнового шлейфа или следа. Экспериментальное обнаружение этой структуры явилось одним из впечатляющих достижений современной океанологии. Теоретические исследования волнового следа, как правило, основаны на аналитическом или численном решении системы гидродинамических уравнений.

Изложенные в монографии методы асимптотического анализа волновой динамики позволяют существенным образом расширить возможности для исследования волновых возмущений океанической поверхности с учетом реальных гидрологических условий, в том числе получение адекватных экспресс оценок при проведении натурных измерений волн в океане. Существующие в настоящее время методы численного моделирования, в том числе с использованием суперкомпьютеров (алгоритмы Riemann Solver для решения гиперболических уравнений мелкой воды, псевдо-спектральный

алгоритм высокого порядка для решений уравнений гидродинамики NOSM, международный численный пакет MIT, моделирующий гидродинамику в рамках уравнений Эйлера и другие) не всегда позволяют эффективно рассчитывать конкретные физические задачи волновой динамики океана (атмосферы) с учетом его реальной изменчивости, так как ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют большой вычислительной мощности, не всегда учитывают физическую специфику решаемых задач, что существенно ограничивает их практическую применимость, особенно при расчетах волновых полей в реальном океане (атмосфере). Кроме того, использование мощных численных алгоритмов требует верификации и сравнение с точными аналитическими решениями модельных задач волновой динамики природных стратифицированных сред

Исследование фундаментальных проблем динамики внутренних и поверхностных волн являются важными для решения задач освоения и рационального использования всех ресурсов и пространств Мирового океана, которые имеют важнейший приоритет государственной политики не только в настоящее время, но и в будущем. Актуальность этих проблем возрастает в связи с усилением роли Мирового океана как наиболее перспективной сферы экономической деятельности и политического влияния. Открытое море, шельф, глубоководное дно и прибрежные районы всегда были предметом серьезного научного изучения и освоения в целях решения экономических проблем,

обеспечения социально приемлемых и экологически безопасных условий для жизнедеятельности.

Научное изучение Мирового океана, использование его ресурсного потенциала, развитие транспортных коммуникаций, присутствие на морских пространствах в целях сохранения позиций России как морской державы, охрана морских границ, контроль за экологической обстановкой, чрезвычайными ситуациями природного и техногенного характера, а также климатические наблюдения - все эти и другие конкретные проблемы, имеющие самостоятельное значение для обеспечения жизнедеятельности и безопасного проживания населения как в прибрежных регионах, так и в стране в целом, требуют комплексного анализа для поиска оптимальных путей их решения, в том числе и использованием результатов фундаментальных научных исследований, натурных наблюдений и разработок.

Новые условия требуют развития эффективного сотрудничества в области освоения и научного изучения потенциала Мирового океана, в том числе в целях более полной защиты российских военно-стратегических, экономических и научно-технических интересов. Современная фундаментальная наука о Мировом океане, опыт многолетних исследований и практических наблюдений, которые проводились в СССР и России, оказывают значительное влияние на все сферы деятельности, связанные с освоением и использованием ресурсов и пространств открытого моря, прибрежной зоны, шельфа, исключительной экономической зоны страны.

Потенциал современной российской науки благодаря созданной фундаментальной научной базе, имеющемуся кадровому составу и техническому оснащению еще достаточно высок, однако при сохранении тенденции к свертыванию научных исследований и особенно экспедиционной деятельности он может быть разрушен. Указанная тенденция уже сейчас отрицательно сказывается на прогнозировании гидрометеорологической обстановки в целях обеспечения хозяйственной, транспортной и оборонной деятельности, получении информации о влиянии антропогенных факторов на уменьшение биоразнообразия и сокращение промысловых биоресурсов Мирового океана, а также на исследованиях строения земной коры дна Мирового океана для оценки запасов минеральных ресурсов, фундаментальных исследованиях проблем взаимодействия океана и атмосферы, ключевых процессов, происходящих в Мировом океане и смежных сферах, и т.п.

Важность проблемы использования минеральных ресурсов Мирового океана, Арктики и Антарктики определяется прежде всего их богатством и разнообразием, перспективностью вовлечения в народнохозяйственный оборот. Ресурсы недр Мирового океана (континентального шельфа и глубоководных районов морского дна) по своим объемам, свойствам и степени воспроизводства намного превосходят аналогичные ресурсы континентов и представляют собой масштабный потенциальный источник минеральных ресурсов. За счет минерального сырья Мирового океана, нефтегазового потенциала шельфовых зон, значительная часть которых находится в Арктике,

может быть создана основа гарантированного обеспечения перспективных потребностей мировой экономики в стратегических видах полезных ископаемых. Выполненные к настоящему времени работы по поиску и разведке месторождений полезных ископаемых в пределах континентального шельфа и в международном районе морского дна пока недостаточны даже для достоверной оценки их запасов. Создание технологий для освоения ресурсов и пространств Мирового океана является одной из центральных проблем, от решения которой зависит успех выполнения комплекса научных и технологических задач. Развитие технологий для освоения ресурсов и пространств Мирового океана предполагающее использование накопленного научно-технического задела, а также продолжение фундаментальных исследований основных океанологических задач, позволит начать реализацию инновационных и других мероприятий, необходимых для решения всего комплекса проблем, связанных с Мировым океаном.

В мире существует несколько крупных научно-исследовательских центров (групп) изучающий внутренние и поверхностные волны в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера). В числе наиболее значимых необходимо отметить следующие: 1) Норвегия (Норвежская Академия наук), профессор J.Grue, основные направления: лабораторное изучение особенностей волновой динамики стратифицированных сред, численное моделирование, натурные наблюдения в акваториях Баренцева и Северного морей, в том числе в районах крупнейшего норвежского месторождения нефти и газа Ormen Lange

(исследование влияния волн на морские нефтяные платформы, подводные трубопроводы, гидротехнические сооружения); 2) Франция (CNRS-UJF-Grenoble INP), профессор В. Voisin, основные направления: лабораторное моделирование волн, аналитическое и численное решение модельных задач; 3) Китай и Тайвань (Taiwan University), основное внимание направлено на натурные наблюдения внутренних и поверхностных волн в акваториях, примыкающий к территории КНР (Южно-Китайское море); Великобритания (Cambridge University) профессора Lighthill J., Newman J.N. и другие ; 4) Канада (Alberte University), профессор Sutherland B.R; 5) США (структурные подразделения NOAA –Национальное управление океанических и атмосферных исследований США, Office of Naval Research (ONR) - ВМФ США), профессора Keller J.B., Miles J., Pedlosky J., Thorpe S.A. и другие. Основные работы зарубежных исследователей посвящены теоретическому изучению физических механизмов генерации внутренних и поверхностных волн, изучению их динамики, численному моделированию генерации от различных источников возмущений. Большое число работ посвящено наблюдению волновых процессов в природных средах (океан, атмосфера). Пик публикаций по этой тематике пришелся на 60-80 года прошлого века. В настоящее время интерес зарубежных ученых к исследованию этих волн возрос, что связано, в том числе, с интенсивным освоением Арктики и ее природных богатств. В связи с ростом интереса к освоению природных ресурсов Арктического шельфа ряд стран Арктического бассейна предпринял меры по активизации фундаментальных

исследований волновых процессов в этом регионе. В этой связи особо следует упомянуть программу инициативных фундаментальных научных исследований, поддержанный Office of Naval Research (ONR)(научно-исследовательское подразделение ВМФ США) начатую в октябре 2011 года и рассчитанную на 10 и более лет. В рамках этой программы были сформулированы ряд научных вопросов, на которые необходимо ответить исследователям, и одними из наиболее важных для практических приложений являются: исследование влияния динамики волн на основные океанические обмены, в т.ч. перенос биомассы, особенности распространения волн в маргинальной зоне Арктического бассейна (области Мирового океана, где процессы в открытом океане, включая океанские волны, радикально влияют на динамические свойства ледяного покрова), волновые процессы в толще моря, влияющие на инженерные сооружения за счет генерируемых волнами течений.

Поэтому Россия в условиях продолжающегося отставания от других стран в области научного и технологического обеспечения морской деятельности нуждается в принятии радикальных мер по переоснащению отечественных научно-исследовательских и промышленных комплексов в Мировом океане, модернизации и обновлению научно-исследовательского, торгового, промыслового и военного флотов, а также в расширении всего спектра фундаментальных исследований в этой области. Важнейшие проблемы России, касающиеся сохранения системы морских коммуникаций и доступа к морям, развития прибрежных районов, могут успешно решаться лишь при условии

использования передовых технологий и развития фундаментальных океанологических исследований. Значительным потенциалом для их создания являются научные достижения, в том числе оборонных отраслей, связанных с деятельностью в морской среде.

Использование биологических ресурсов Мирового океана – одно из наиболее перспективных направлений решения продовольственной проблемы растущего населения Земли, и Россия продолжает входить в число ведущих государств мира, определяющих тенденцию развития мирового рыболовства. В продовольственном комплексе страны рыбное хозяйство занимает значительное место, являясь поставщиком пищевой, кормовой, технической и медицинской продукции. Однако объемы поставок этих видов продукции в настоящее время не соответствуют существующим потребностям и возможностям России как крупной морской державы. Биологические ресурсы экономической зоны России в Мировом океане (дальневосточные моря, зона Арктического шельфа), которые по своему видовому составу предоставляют уникальную возможность для производства рыбной продукции высокой потребительской стоимости, уже сейчас используются на пределе. Поэтому стратегическими задачами является не только обеспечение контроля за рациональной добычей природных биоресурсов, но и продолжение фундаментальных исследований по изучению этих основных и перспективных районов добычи морепродуктов в России: дальневосточные моря, зона Арктического шельфа.

Проблемы комплексного научного изучения, освоения и использования Арктики особенно важны в связи с особыми национальными интересами (экономическими, оборонными, геополитическими, научными) Российской Федерации в этом регионе и его спецификой. Экономические интересы России в Арктике обусловлены тем, что здесь сосредоточены месторождения ряда важнейших полезных ископаемых, являющихся определяющими для развития экономики всей страны в настоящее время и в еще большей степени - в ближайшей перспективе. Оборонные интересы связаны с базированием в Арктике основных российских морских стратегических ядерных сил, а также с необходимостью защиты протяженной государственной границы в Северном Ледовитом океане.

Очевидно, что геополитические интересы России в Арктике объясняются ее особым географическим положением и пересечением в этом регионе интересов многих стран. Научные интересы России в Арктике обусловлены тем, что соответствующее научное обеспечение является необходимым условием для всех видов деятельности в этом регионе, а также важной ролью Арктики в глобальных процессах, происходящих на Земле. К основным проблемам российской Арктики относятся спад в экономике, свертывание градообразующих производств, упадок социальной инфраструктуры, резкое сокращение объема научных исследований, несвоевременное и недостаточное снабжение топливом и продовольствием. Особую опасность в экстремальных природно-климатических условиях этого региона представляет очаговое

негативное воздействие на окружающую среду, что сказывается на росте заболеваемости и сокращении продолжительности жизни. Проблемы прибрежных арктических регионов являются составной частью проблемы освоения и использования Мирового океана.

Поэтому проблема создания единой системы мониторинга Мирового океана обусловлена настоятельной необходимостью поднять на новый качественный уровень обеспечение всех видов морской деятельности (в том числе научно-исследовательской) актуальной и полной информацией, являющейся основой решения соответствующих научно-технических, экономических, политических, военно-стратегических, экологических и других задач, связанных с изучением, освоением и эффективным использованием ресурсов и пространств Мирового океана. Интеграция всех государственных информационных ресурсов по проблемам Мирового океана в должна происходить в рамках единой системы, создаваемой на базе существующих систем, научно-исследовательских и информационных центров, и требует государственной финансовой поддержки, межведомственной координации научно-технических работ, организационных решений и фундаментальных исследований.

Анализ современного состояния проблемы изучения, освоения и эффективного использования ресурсного потенциала и пространств Мирового океана в интересах экономического развития и обеспечения национальной безопасности России позволяет выделить следующие определяющие факторы: острота геополитических, международно-правовых, социально-экономических,

научно-технических и экологических аспектов проблемы; многоаспектность и комплексность проблемы, требующая координации деятельности государственных органов федерального и регионального уровней, организаций различного профиля и организационно-правовых форм; невозможность ее решения в условиях существующих рыночных механизмов без государственного регулирования и государственной поддержки. Геополитическое положение России, протяженность ее морских границ, сложившаяся и потенциальная зависимость от ресурсов Мирового океана, морских коммуникаций настоятельно требуют комплексного решения этой общегосударственной проблемы в рамках единой долгосрочной стратегии. Так как эта проблема носит целевой характер, то ее решение должно обеспечить научное изучение, освоение и рациональное использование всего ресурсного потенциала и пространств Мирового океана. Отдельные виды ресурсов, регионы Мирового океана, входящие в зону национальных интересов России, различные научно - технические средства и технологии, международное научное, правовое и информационное обеспечение представляют собой составные компоненты общей проблемы. Это обуславливает необходимость поиска оптимальных решений в каждом направлении с учетом всего комплекса национально-государственных целей, ограниченности имеющихся ресурсов и эффективности разрабатываемых мероприятий.

Проведение широкого круга фундаментальных и прикладных океанологических исследований должны обеспечить, с помощью новых

технологий и технических средств, включая информационные, реализацию основных направлений по освоению ресурсов Мирового океана. Многоаспектность и комплексность данной проблемы определяется тем, что она включает совокупность взаимосвязанных единым физическим объектом (Мировым океаном), фундаментальных и прикладных задач по его изучению, освоению и рациональному использованию. Поэтому рассмотренные в настоящей монографии фундаментальные научные проблемы волновой динамики природных стратифицированных могут внести заметный вклад в решение этих стратегических задач.

Необходимо отметить, что в последней трети двадцатого века произошел прорыв в геофизической гидродинамике, описывающей глобальные физические процессы Мирового океана. Среди наиболее важных и фундаментальных научных открытий можно отметить следующие: была создана теория эволюции земной коры, в гидродинамике океана были сформулированы новые физические концепции теории и идеи, отражающие влияние океанических процессов на жизнь океанов и климат Земли, были открыты и объяснены подводные звуковые каналы, ринги Гольфстрима, свободные синоптические вихри открытого океана и многое другое. В связи с мощным прогрессом компьютерных технологий произошел переход от дискретных измерений температуры и солености на отдельно выбранных морских глубинах к практически непрерывному измерению профилей характеристик морской воды с помощью высокоразрешающих зондов, в том числе в 3D формате. Это

позволило, в частности, выявлять такие неожиданные эффекты как тонкоструктурное расслоение океанических полей, линзы аномальных вод (например, линзы средиземноморских вод в Атлантике) и ряд других интересных эффектов, объясняющих физику Мирового океана как очень сложной динамической многопараметрической системы: все движения вод Мирового океана представляют собой очень сложную нестационарную картину разномасштабных и разнонаправленных движений, причем диапазон пространственных масштабов распространяются от минимальных (миллиметры, мелкомасштабная турбулентность) до размеров самих океанов, а время жизни от соответственно от нескольких секунд до десятков и более лет.

Поэтому актуальность рассмотренных в монографии научных проблем обусловлена не только практическими потребностями, но и большим теоретическим содержанием возникающих здесь фундаментальных задач математического моделирования волновой динамики сложных сред. Изучение волновых процессов в неоднородных стратифицированных природных средах превратилось в быстро развивающуюся область, причем результаты этих исследований важны как с фундаментальной точки зрения, так и для технических приложений. Новые экспериментальные и технические возможности стимулируют работу по математическому моделированию и асимптотическому исследованию волновой динамики внутренних и поверхностных волн. При этом в основе анализа, как правило, лежат асимптотические методы, что позволяет на базе изучения невозмущенных

уравнений формировать соответствующие асимптотические разложения, учитывающие неоднородность и нестационарность природных стратифицированных сред. Основное внимание, как правило, уделяется экспериментальному исследованию волновой динамики, детальному теоретическому рассмотрению динамики внутренних и поверхностных линейных волн в средах с модельными распределениями плотности, а также прямому численному моделированию соответствующих уравнений гидродинамики. Относительная простота решения линейных уравнений по сравнению с полной нелинейной задачей, современное развитие соответствующего математического аппарата и вычислительной техники позволяют ответить на многие запросы практики. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с волновой динамикой стратифицированных неоднородных по горизонтали и нестационарных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы.

Однако в ряде случаев адекватное первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. В этом отношении особую роль имеют задачи математического моделирования динамики пакетов внутренних и поверхностных волн, решению которых

посвящена настоящая монография. Даже в рамках линейных моделей, как показано в данной книге, их решения достаточно своеобразны и определяют наряду с нетривиальными физическими следствиями и самостоятельный математический интерес. При исследовании волновых процессов в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера) содержательную роль играет математическое и численное моделирование. Область применения численного моделирования можно разбить на три соответственно их физической природе: толщина океана, поверхность поверхностные явления, процессы распространения сигналов, отраженных поверхностным волнением. Для правильной интерпретации данных, например, при зондировании морской поверхности и получение по этим сведениям о процессах в глубоком океане глубоких слоях океанической среды, нужно знать причины вызывающие те или иные поверхностные явления.

В экспериментальных и натурных наблюдениях внутренних и поверхностных волн, а также при рассмотрении большого числа конкретных задач накоплен большой фактический материал, который нуждается в теоретическом осмыслении. Поэтому в настоящее время актуальным стал вопрос о дальнейшем развитии методов математического моделирования процессов внутренних и поверхностных колебаний в стратифицированных средах, изложению которых и посвящена данная монография. Хотя большинство практически важных задач этого класса решается, как правило, в линейной постановке, для дальнейших исследований необходимо оценивать

пределы применимости этих приближений и на этой основе искать пути к решению полной нелинейной задачи. Необходимость этого выяснилась, например, при исследованиях рассеивания волн погруженными источниками возмущений, в том числе рельефом морского дна. Актуальность исследований по математическому моделированию волновых пакетов в стратифицированных средах связана с тем, что искомое решение в линейной постановке посредством преобразования Фурье представляется в форме квадратур от решения соответствующих вертикальных спектральных задач. После аналитического или численного решения этой задачи волновое поле можно найти численным интегрированием, и, казалось бы, нет необходимости в исследовании асимптотик. Тем не менее, получение таких асимптотик весьма актуально как с научной точки зрения, так и для практических приложений. Объясняется это следующими причинами. Во-первых, по мере увеличения времени и расстояния от источников возмущений приходится вычислять интегралы от все более и более осциллирующих функций, и численные расчеты делаются все более и более трудоемкими. Во-вторых, получить из численных расчетов качественное описание уходящих от источника волновых пакетов внутренних и поверхностных волн, их эволюцию во времени и пространстве, их зависимость от характеристик источника и т.п. практически либо невозможно, либо это требует больших расчетов. В тоже время асимптотические выражения для волновых полей представляют собой явные формулы, выражающиеся через известные специальные функции, и их качественный анализ, как правило, не

вызывает затруднений. В-третьих, найденные асимптотики позволяют, в принципе, перейти к более реалистической ситуации сред, параметры которых медленно меняются по горизонтали и времени, так как наличие явных аналитических конструкций позволяет учесть изменение параметров среды вдоль трассы распространения волновых пакетов посредством соответствующего изменения аргументов, описывающих поле специальных функций, а также амплитудных фазовых множителей.

Изложенные в монографии методы и подходы к исследованию динамики и генерации внутренних и поверхностных волн сочетают сравнительную простоту и вычислительную мощь аналитических результатов, а также возможность их качественного анализа. Разработанные методы математического моделирования могут быть использованы для исследования любых других волновых процессов (акустические и сейсмические волны, СВЧ-излучение, волны цунами и т.п.) в реальных средах со сложной структурой. Значение предложенных методов анализа волновых полей определяется не только их наглядностью, универсальностью и эффективностью при решении разнообразных задач, но и тем, что они могут явиться некоторой полуэмпирической основой других приближенных методов при математическом моделировании волновых пакетов иной физической природы.

Все фундаментальные результаты, изложенные в монографии, получены для произвольных распределений плотности и других параметров неоднородных стратифицированных сред, и, кроме того, основные физические механизмы

формирования изученных явлений волновой динамики неоднородных стратифицированных сред рассматривались в контексте непротиворечивости имеющихся данных натурных измерений волн в реальных природных средах (океан, атмосфера). Универсальный характер предложенных асимптотических методов математического моделирования пакетов внутренних и поверхностных волн дополняется универсальными эвристическими условиями применимости этих методов. Эти критерии обеспечивают внутренний контроль применимости использованных асимптотических методов, и в ряде случаев на основе сформулированных критериев удастся оценивать волновые поля там, где другие методы неприменимы. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно как для правильной постановки теоретических исследований, так и для проведения оценочных и экспресс расчетов при натурных измерениях пакетов внутренних и поверхностных волн, в том числе с помощью методов дистанционной спутниковой радиолокации.

Особая роль данных методов обусловлена тем обстоятельством, что параметры природных стратифицированных сред, как правило, известны приближенно, и попытки точного численного решения исходных уравнений с использованием таких параметров могут привести к потере точности. Поэтому изложенные в монографии фундаментальные научные результаты, а также разработанные методы и подходы могут быть использованы специалистами в области численного и математического моделирования сложных сред, геофизической гидродинамики, океанологии, морской гидротехнике, при

строительстве сложных морских гидротехнических сооружений, а также при решении иных физических и прикладных задач.



## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**



1. Актуальные проблемы механики: механика жидкости, газа и плазмы. М.: Наука, 2008, 285 с.
2. Арнольд А.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996, 334 с.
3. Арнольд В.И. Волновые фронты и топология кривых. М.: Фазис, 2002, 120 с.
4. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972, 456 с.
5. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1985, 272 с.
6. Баханов В.В., Горячкин Ю.Н., Корчагин Н.Н., Репина И.А. Локальные проявления глубинных процессов на поверхности моря и в приводном слое атмосферы // Доклады РАН. 2007, Т.414, №1, С. 111-115.
7. Бежанов К.А. Многослойные установившиеся течения идеальной несжимаемой тяжелой жидкости. // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М.: Московский физико-технический институт, 1991, 245 с.
8. Бежанов К.А., Заец П.Г., Онуфриев А.Т., Тер-Крикоров А.М.. Пространственные задачи обтекания неровного дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости.// Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990, №3, С.101-111.

9. Бежанов К.А., Тер-Крикоров А.М. Пространственная задача обтекания источника потоком многослойной жидкости конечной и бесконечной глубины // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1993, т.29, №6, С.771-779.
10. Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. Новосибирск.: Наука, Сибирское отделение, 1991, 176 с.
11. Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.О., Гушин В.А., Морозов Е.Н., Онуфриев А.Т., Ульянов С.А. Численное и экспериментальное моделирование гравитационных внутренних волн при движении тела в стратифицированной жидкости // Доклады АН СССР, 1984, т. 279, № 3, С. 562-566.
12. Бондур В.Г. Аэрокосмические методы в современной океанологии. Том 1. Физика. Химия. Биология. М.: Наука. 2004, С.55-117.
13. Бондур В.Г., Морозов Е.Г., Бельчанский Г.И., Гребенюк Ю.В. Радиолокационная съемка и численное моделирование внутренних приливных волн в шельфовой зоне // Исследование Земли из Космоса, 2006, №2, С. 51-63.
14. Боровиков В.А. Дальнее поле движущегося осциллирующего источника в случае резонанса // Прикладная математика и механика, 1998, т.62, №2, С.243-256.

- 15.Боровиков В.В., Булатов В.В. О границах применимости асимптотических формул для поля внутренних волн, возбуждаемых движущимся источником // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1986, т.22, № 6, С.658-661.
- 16.Боровиков В.А., Булатов В.В., Кельберт М.Я. О промежуточной асимптотике дальнего поля внутренних волн в слое стратифицированной жидкости, лежащем на однородном слое // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988, № 3, С.158-162
- 17.Боровиков В.А., Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Левченко Е.С. О расчете поля внутренних гравитационных волн, генерируемых неподвижным источником в потоке стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики. 1989, № 4, С.58-61.
- 18.Боровиков В.А., Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Исаев И.Л., Ломанов Ю.П., Фрост В.А. Обработка и анализ измерений внутренних волн в районе шельфа Западной Сахары // Океанология. 1993, т.33, № 4, С.532-535.
- 19.Боровиков В.А., Булатов В.В., Морозов Е.Г., Тамайо Р.Г. Неспектральное и спектральное исследование распространения приливных внутренних волн в океане (на примере эксперимента «Мезополигон») // Океанология, 1998, т.3, №38, С.343-348.
- 20.Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М.Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками //

- Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1984, т. 20, № 6, С. 526-532.
- 21.Бреховских Л.М., Гончаров В.В.. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982, 336 с.
- 22.Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007, 370 с.
- 23.Бреховских Л.М.,Годин О.А. Акустика неоднородных сред (в 2 томах). Том 1: Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007, 443 с. Том 2: Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. М.: Наука, 2009, 426 с.
- 24.Булатов В.В. Установившееся движение стратифицированной жидкости над неровным дном // Журнал прикладной механики и технической физики. 1991, № 5, С.34-39.
- 25.Булатов В.В., Ваньян П.Л., Владимиров Ю.В., Морозов Е.Г. Распространение внутренних приливных волн в северо-западной части Тихого океана // Известия Академии инженерных наук РФ. Прикладная математика и информатика, 2000, т.1, С.112-117.
- 26.Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в неоднородной по горизонтали среде // Морской гидрофизический журнал. 1989, № 6, С.14-19.
- 27.Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в стратифицированных неоднородных по горизонтали средах

- М.: Препринт Института проблем механики АН СССР, 1990, № 445, 23 с.
28. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в нестационарных средах // Морской гидрофизический журнал, 1990, № 5, С.13-18.
29. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Ближнее поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником в потоке стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики. 1991, № 1, С.24-28.
30. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые источником в стратифицированных неоднородных по горизонтали средах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991, № 1, С.124-128.
31. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. О расчете поля внутренних гравитационных волн при произвольном нестационарном движении источника // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1995, №3, С.174-177.
32. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Равномерная асимптотика дальнего поля внутренних гравитационных волн при движении источника в слое стратифицированной жидкости с плавноменяющимся дном // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1998, №3, С.111-120

33. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Об асимптотике критических режимов генерации внутренних гравитационных волн // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2000, №5, С.124-128.
34. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Локальные и нелокальные источники критических режимов генерации внутренних гравитационных волн в неоднородных средах М.: Препринт Института проблем механики РАН, 2004, №750, 19с.
35. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. М.: Наука, 2005, 195 с.
36. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Численные алгоритмы решениям модифицированной спектральной задачи уравнения внутренних гравитационных волн // Препринт Института проблем механики РАН, 2005, №788, 20с.
37. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Точные представления и асимптотики модифицированной функции Грина уравнения внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной жидкости с постоянным средним течением // Препринт Института проблем механики РАН , 2006, №813, 33 с.
38. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. О расчете собственных функций и дисперсионных кривых основной вертикальной спектральной задачи уравнения внутренних гравитационных волн // Математическое моделирование, 2007, Т.19, №2, С.59-68.

39. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. О моделировании полей внутренних гравитационных волн от нелокальных источников возмущений // Математическое моделирование, 2008, Т.20, №8, С.3-12.
40. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Исследование динамики внутренних гравитационных волн при критических режимах генерации и в окрестности траекторий движения источников возмущений. Препринт Института проблем механики РАН, 2008, №872, 23 с.
41. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Модифицированная функция Грина для уравнения внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды с постоянным сдвиговым течением // Прикладная математика и механика, 2008, Т.72, №5, С.727-733.
42. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны при критических режимах генерации и в окрестности траекторий движений источников // Журнал прикладной механики и технической физики, 2008, Т.49, № 5, С.70-79.
43. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Негармонические волновые пакеты внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // В кн.: Актуальные проблемы механики: механика жидкости, газа и плазмы. М.: Наука, 2008, 285 с. - С.274-284

44. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Оценка границ применимости линейной теории внутренних гравитационных волн // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2010, №5, С.123-129
45. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Моделирование волновой динамики неоднородных и нестационарных стратифицированных сред // Математическое моделирование, 2010, Т. 22, №12, С.3-12
46. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010, 470 с.
47. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от осциллирующих источников возмущений // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2011, Т. 47, №2, С.1-4
48. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика волнового поля в стратифицированной среде переменной глубины // Доклады РАН. 2012, Т.444, №2, С.208-211.
49. Булатов В., Владимиров Ю. Волновые движения стратифицированных сред: теория и приложения Saarbrucken: Palmarium Academic Publishing, 2012, 577 с.
50. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика дальних полей внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины // Препринт Института проблем механики РАН, 2012, №1019, 70 с

51. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Асимптотики высших приближений полей внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины // Журнал прикладной механики и технической физики, 2013, Т.54, №1, С.79-85.
52. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости переменной глубины // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2013, Т. 49, №3, С.358-363
53. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика, 2013, Т.6, №2, С.55-70
54. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Моделирование волновой динамики стратифицированных сред с учетом нелинейности, вязкости, вращения земли и сжимаемости // Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/606.html>
55. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика стратифицированных сред с учетом нелинейности, вязкости, вращения Земли и сжимаемости // Препринт Института проблем механики РАН, 2013, №1040, 71 с.
56. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Фундаментальные проблемы моделирования динамики внутренних волн в океане с переменными и

- нестационарными параметрами // В книге Современные методы и средства океанологических исследований (МСОИ 2013) : Материалы XIII Международной научно-технической конференции «МСОИ-2013». М.: АПР, 2013, Том 1, 384 с. С.234-237.
57. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Моделирование волновой динамики стратифицированных сред с учетом нелинейности, вязкости, вращения Земли и сжимаемости // В сборнике: Труды МГТУ им.Н.Э.Баумана «Динамика возмущений в сплошных средах. Сборник статей», выпуск №608. С.48-73. М.: Издательство МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2013, 224 с.
58. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Точные и асимптотические решения уравнения внутренних гравитационных волн в клиновидной области // Прикладная математика и механика, 2014, Т. 78, № 5, С.690-699.
59. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в нестационарном океане // Международный научно-исследовательский журнал, 2014, №11(30), часть 4, С.100-104
60. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние и поверхностные возмущения природных стратифицированных сред // Международный научно-исследовательский журнал, 2015, №2(33), часть 4, С.70-76
61. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика стратифицированных сред переменной глубины // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 58–76

62. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волн, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2015, №6, С. 26-34.
63. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн при произвольных скоростях движения источника возмущений // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2015, том 51, №6, С.684-689
64. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины // Фундаментальная и прикладная гидрофизика, 2015, том 8, №3, С.24-31
65. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015, 735 с.
66. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2016, №5, С. 57-63.
67. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика импульсов в стратифицированных сжимаемых и несжимаемых средах // Международный научно-исследовательский журнал, 2016, №3(45), часть 2, С.93-100

68. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Особенности волновой динамики стратифицированных сред с переменной частотой плавучести // Международный научно-исследовательский журнал, 2016, №5(47), часть 6, С.71-75
69. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика экспоненциально стратифицированных сред // Международный научно-исследовательский журнал, 2017, № 4-1 (58) С. 77-80
70. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика стратифицированных сред с течениями // Международный научно-исследовательский журнал, 2017, № 6-2(60), С. 108-110
71. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Тория волновых движений неоднородных сред. Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017, 580 с.
72. Булатов В.В., Владимиров И.Ю., Владимиров Ю.В. Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2014, №5, С.111-118
73. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Данилов В.Г., Доброхотов С.Ю. О распространении точечной алгебраической особенности для двумерных нелинейных уравнений гидродинамики // Математические заметки, 1994, Т.55, вып.3, С.11-20.

74. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Данилов В.Г., Доброхотов С.Ю. Пример вычисления траектории "глаза" тайфуна на основе гипотезы В.П.Маслова // Доклады РАН. 1994, Т.338, №1, С.102-107.
75. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Данилов В.Г., Доброхотов С.Ю. Распространение точечной алгебраической особенности для нелинейных уравнений гидродинамики и моделирование мезомасштабных вихрей в неоднородной атмосфере на основе гипотезы В.П.Маслова // Препринт Института проблем механики РАН. 1995, № 552, 39 с.
76. Бышев В.И. Синоптическая и крупномасштабная изменчивость океана и атмосферы М.: Наука, 2003, 344 с.
77. Бэтчелор Дж.К. Введение в динамику жидкости. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, 768 с.
78. Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Генерация трехмерных периодических внутренних волн и сопутствующих пограничных слоев в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости. Построение аналитического решения. // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2006, №6, С.106-113.
79. Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С., Савина Е.О. Обтекание препятствий стратифицированным потоком со свободной границей // Океанология. 2011, Т.51, №6. С. 974-983.
80. Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Поверхностные эффекты при обтекании препятствий в неоднородно-стратифицированной среде //

Доклады РАН. 2011, Т.440, №6. С.826-829.

- 81.Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Поверхностные возмущения при обтекании препятствий стратифицированным потоком конечной глубины // Океанология. 2012, Т.52, №6. С. 825-835.
- 82.Владимиров Ю.В. Поле внутренних волн в окрестности фронта, возбужденное источником, движущимся над плавно меняющимся дном // Журнал прикладной механики и технической физики, 1989, № 4, С. 89-94.
- 83.Владимиров Ю.В. Точное решение для стоячих монохроматических внутренних волн в клине // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2012, №5, С.73-79
- 84.Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Сборник научных трудов. Горький: Институт прикладной физики АН СССР, 1982, 252 с.
- 85.Воляк К.И. Избранные труды. Нелинейные волны в океане. М.: Наука, 2002, 486 с.
- 86.Воронович А.Г. О распространении внутренних волн в неоднородном по горизонтали океане // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1976, т.12, №1, С.83-92.
- 87.Воронович А.Г. Распространение внутренних и поверхностных волн в приближении геометрической оптики // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1976, т.12, №8, С.850-857.

88. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998, 448 с.
89. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированной жидкости М.: Наука, 1986, 288 с.
90. Гидрофизические исследования по программе "Мезополигон". М.: Наука, 1988, 264 с.
91. Годин О.А., Бреховских Л.М. Акустика сплошных сред. М.: Наука, 1989, 414с.
92. Горелов А.М., Зевакин Е.А., Иванов С.Г., Каледин С.Б., Леонов С.О., Носов В.Н., Савин А.С. О комплексном подходе к дистанционной регистрации гидродинамических возмущений морской среды оптическими методами // Физические основы приборостроения. 2012, Т.1, №4. С. 58-64.
93. Городцов В.А. Порождение и динамика малых возмущений в стратифицированных жидкостях // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М.: Институт проблем механики РАН, 1996.
94. Городцов В.А. Излучение внутренних волн быстро движущимися источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости // Доклады Академии наук СССР, 1981, т.256, №6, С.1375-1378.

- 95.Городцов В.А. Волны-предвестники при движении источников переменной интенсивности в стратифицированной жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1994, №2, С.97-103.
- 96.Городцов В.А., Теодорович Э.В.. Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников. //Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т.16, №9, С.954-961.
- 97.Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962, 1100с.
- 98.Гранберг И.Г. Пространственная задача обтекания препятствия потоком несжимаемой стратифицированной жидкости (численное моделирование) // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1983, т.19, №4, С.357-365.
- 99.Григорьев П.Л., Яковлев В.А. К решению задачи Коши уравнения внутренних волн в среде с жесткими границами// Журнал технической физики, 1986, т.56, №11, С.2087-2090.
100. Докучаев В.П., Долина И.С. Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1977, т.13, №6, С.655-663.

101. Завольский Н.А. Особенности распространения линейных внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1987, №1, С.106-110.
102. Завольский Н.А., Зайцев А.А. К вопросу о развитии внутренних волн, генерируемых сосредоточенным импульсным источником в безграничной, равномерно стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики, 1984, №6, С.58-64.
103. Елизарова Т.Г. Квазидинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007, 352 с
104. Изменчивость гидрофизических полей Черного моря (под ред. Б.А.Нелепо). Л.: Гидрометеоиздат, 1984, 240 с.
105. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 256 с.
106. Индейцев Д.А., Кузнецов Н.Г., Мотыгин О.В., Мочалова Ю.А. Локализация волновых процессов. СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2007, 342 с.
107. Калиткин Н.Н.. Численные методы. М.: Наука, 1978, 512с.
108. Кельберт М.Я., Сазонов И.А.. Распространение импульсов в жидкостях. М.: Наука, 1991, 158с.
109. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики, 1998, № 5, С.88-98.

110. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Регулярные и сингулярные компоненты периодических течений в толще жидкости // Прикладная математика и механика, 2007, т.71, № 5, С.844-854.
111. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Динамика морских волн. М.: Издательство Московского университета, 1985, 298 с.
112. Коняев К.В. Спектральный анализ океанологических полей. Л.: Гидрометеиздат, 1981, 208 с.
113. Коняев К.В., Сабинин К.Д. Волны внутри океана. С.-Пб.: Гидрометеиздат, 1992. 272 с.
114. Корчагин Н.Н., Савин А.С., Савина Е.О. Волны на поверхности моря, обусловленные обтеканием подводного препятствия // Океанология. 2009, Т.49, №3, С. 348-354.
115. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980, 304 с.
116. Краусс В. Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968, 272с.
117. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987, 688 с.
118. Лайтхил Д. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981, 598с.
119. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986, 736 с.
120. Ле Блон П., Майсек Л.. Волны в океане. В 2-х томах. М.: Мир, 1981, т.1, 480с., т.2, 365с.

121. Льюис Р. Формальная теория бегущей волны // В кн. : Квазиоптика. М.: Мир, 1968, с.80-104.
122. Лэмб Г. Гидродинамика (в 2-х томах). Москва- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, т. 1 - 452 с., т. 2 - 482 с.
123. Люк Ю.Л. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980, 608 с.
124. Макаров С.А., Чашечкин Ю.Д. Присоединенные внутренние волны в вязкой несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1982, т. 18, № 9, С. 986-994.
125. Марсден Дж.Э., Чорин А. Математические основы механики жидкости. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, 204 с.
126. Мельников В.А. Влияние рельефа дна на внутренние волны // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982, т. 18, № 7, С.775-778.
127. Методы, процедуры и средства аэрокосмической радиотомографии приповерхностных областей Земли. По ред. Нестерова С.В., Шамаева А.С., Шамаева С.И. М.: Научный мир, 1996, 272 с.
128. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981, 302с.
129. Молотков И.А. Аналитические методы в теории нелинейных волн. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 208 с.

130. Молотков И.А., Вакуленко С.А., Бисярин М.А. Нелинейные локализованные волновые процессы. М.: Янус-К, 1999, 176 с.
131. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеиздат, 1988, 424 с.
132. Монин А.С., Миропольский Ю.З. Внутренние волны. - В кн.: Физика океана, т. 2, Гидродинамика океана (под ред. Каменковича В.М., Моница А.С.) М: Наука, 1978, с. 182-218.
133. Монин А.С., Корчагин Н.Н. Десять открытий в физике океана. М.: Научный мир, 2008, 172 с.
134. Морозов Е.Г. Океанские внутренние волны. М.: Наука, 1985. 151 с.
135. Морозов Е.Г. Генерация внутренних приливов на подводных хребтах // Океанологические исследования, 1988, №41, с.55-67.
136. Морозов Е. Г., Нечволодов Л.В. Лучевое распространение внутренних приливов над континентальным склоном // Известия Академии Инженерных Наук Российской Федерации, 2006, т. 18, С. 33-40.
137. Муравский Г.Б. Квадратурная формула для интегралов от быстроосциллирующих и резко меняющихся функций // Известия высших учебных заведений. Математика, 1988, №9, С.55-57.
138. Навроцкий В.В., Лазарюк А.Ю., Малышев А.А. Особенности структуры гидрофизических характеристик и внутренних волн вблизи границ шельфа // Доклады АН СССР, 1989, т. 309, № 1, С. 187-191.

139. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984, 536 с.
140. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И., Стурова И.В. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985, 318 с.
141. Островский Л.А, Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 400 с.
142. Перегудин С.И. Волновые движения в жидкости и сыпучих средах. С.-Пб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2004, 288 с.
143. Поверхностные и внутренние волны в арктических морях. С.-Пб.: Гидрометеиздат, 2002, 364 с.
144. Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. Новейшие методы обработки изображений. М.. ФИЗМАТЛИТ, 2008, 494 с.
145. Проблемы геофизики XXI века: в 2 книгах. Книга 1. М.: Наука, 2003, 311 с.
146. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Москва- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 560 с.
147. Рожков В.А. Методы вероятностного анализа океанических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1979, 280 с.
148. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980, 616 с.

149. Рындина В.В. Собственные частоты внутренних волн в жидкости и частота Брента-Вяйсяля. Ростов-на-Дону: Издательство ЦВВР, 2007, 128 с.
150. Самодуров А.С. Внутренние волны в среде с меняющейся по горизонтали частотой Брента-Вяйсяля // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1974, т.10, №3, С.306-309.
151. Самодуров А.С., Чухарев А.М., Носова А.В., Глобина Л.В. Интенсификация внутренних волн в зоне сопряжения шельфа и континентального склона как фактор интенсификации вертикального обмена // Фундаментальная и прикладная гидрофизика, 2013, т.6, №2, С.12-24.
152. Санников В.Ф. Поле горизонтальных скоростей, создаваемое движущимся источником возмущений в стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики, 1990, №3, С.78-83.
153. Санников В.Ф. Точное решение линейной задачи об установившихся волнах, создаваемых диполем в потоке стратифицированной жидкости // Прикладная математика и механика, 1990, т.54, №6, С.977-978.
154. Санников В.Ф. Улучшение сходимости по модам внутренних волн, создаваемых движущимся диполем // Прикладная математика и механика, 1998, т.62, №5, С.796-802.

155. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984, 472 с.
156. Секерж-Зенькович С.Я. Фундаментальное решение оператора внутренних волн // Доклады АН СССР, 1979, т.246, №2, С.286-289.
157. Секерж-Зенькович С.Я. Построение фундаментального решения оператора внутренних волн // Прикладная математика и механика, 1981, т.45, №2, С.266-274.
158. Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. М.: Мир, 1989, 664 с.
159. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977, 816 с.
160. Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В.. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Серия «Механика жидкости и газа», т.22, М.:ВИНИТИ, 1987, С.93-179.
161. Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л. Распространение волн в сдвиговых потоках. М.: Наука, 1996, 240 с.
162. Стурова И.В. Внутренние волны, возникающие в экспоненциально стратифицированной жидкости при произвольном движении источника. // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1980, № 3, С. 67-74.
163. Стурова И.В. Внутренние волны, возникающие при нестационарном движении источника в непрерывно стратифицированной

- жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1985, №4, С.122-130.
164. Талипова Т.Г, Пелиновский Е.Н. Моделирование распространяющихся длинных внутренних волн в неоднородном океане // Фундаментальная и прикладная гидрофизика, 2013, т.6, 32, С.46-54.
165. Тареев Б.А. Динамика бароклинных возмущений в океане. М.: Издательство Московского университета, 1974, 188с.
166. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости. М.: Мир, 1977, 432 с.
167. Уфимцев П.Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. М.: БИНОМ.Лаборатория знаний, 2007, 366 с.
168. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны М.: Мир, 1977, 622 с.
169. Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987, 544 с.
170. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука, 1980, 352 с.
171. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352с.
172. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн (в 2 томах) . М.: Мир, 1978, т.1 - 546 с., т.2 – 556 с.
173. Чашечкин Ю.Д., Гуменник Е.В., Сысоева Е.Я. Трансформация плотностного поля трехмерным телом, движущимся в непрерывно

- стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики, 1995, № 1, С. 20-32.
174. Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В., Ильиных Ю.С. Экспериментальное исследование генерации периодических внутренних волн пограничным течением на вращающемся диске // Доклады Академии наук, 2000, т.375, №3, С.338-342.
175. Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В. Классификация трехмерных периодических движений в жидкости // Доклады Академии наук, 2004, т.395, №1, С.55-58.
176. Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наукова думка, 1976, 364 с.
177. Черкесов Л.В. Основы динамики несжимаемой жидкости. Киев: Наукова думка, 1983, 168 с.
178. Шамин Р.В. Вычислительный эксперимент в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008. 133с.
179. Шамин Р.В. Математические вопросы волн-убийц. М.: ЛЕНАНД, (Серия: Синергетика от прошлого к будущему. № 76). 2016. 168 с.
180. Широков И.А. Решение уравнения Пуассона на многопроцессорной системе в задачах моделирования несжимаемой жидкости // Дифференциальные уравнения, 2003, №39(7), С.993-1000.
181. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999, 232 с.

182. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. Москва- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, 328 с.
183. Юэн Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987, 179 с.
184. Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.) Handbook of mathematical functions. New York: Dover Publications., 1992.
185. Abdilghanie A.M., Diamessis P.J. The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J.Fluid Mech., 2013. Vol.720. P.104-139|
186. Airy G.B. On the intensity of light in the neighborhood of a caustic // Trans.Cambr.Phil.Soc., 1838. Vol.6. P.379-402.
187. Alendal G., Berntsen J., Engum E., Furnes G.K., Kleiven G., Eide L. I. Influence from “Ocean Weather” on near seabed currents and events at Ormen Lange // Marine and Petroleum Geology, 2005.Vol. 22. P.21-31.
188. Amen R., Maxworthy T. The gravitational collapse of a mixed region into a linearly stratified fluid. // J. Fluid Mech., 1980. Vol.96(1), P.65-80.
189. Apel J.R. Observations of internal-wave surface signatures in ASTP photographs. In: Apollo-Soyuz Test Project. Summary Science Report. Vol. II, NASA SP, Washington, Scientific and Technical Inf., 1978. P. 505-509
190. Appleby J. C., Crighton D. G. Internal gravity waves generated by oscillations of a sphere. // J. Fluid Mech., 1987. Vol.183, P.139-150.
191. Arnold V.I. Catastrophe theory. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992

192. Arnold J.M., Felsen L.B. Local intrinsic modes: layer with nonplanar interface // *Wave Motion* . 1986. Vol.8. №.1. P.1-14
193. Babich V.M., Buldyrev V.S. Short-wavelength diffraction theory - asymptotic methods. Vol.4 of Springer Series on Wave Phenomena . Springer-Verlag. 1991.
194. Babich V.M., Buldyrev V.S. Asymptotic methods in short-wavelength diffraction theory. Oxford: Alpha Science, 2007. 480 pp.
195. Baines P. G. The reflexion of internal/inertial waves from bumpy surfaces. // *J.Fluid Mech.*, 1971. Vol.46, P.273-291.
196. Baines P. G. Observations of stratified flow past three-dimensional barriers. // *J. Geophys. Res.*, 1979. Vol.84(12). P.7834-7838.
197. Baines P. G. Upstream blocking and airflow over mountains. // *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1987. Vol.19. P.75-97.
198. Baines P. G., Grimshaw R. H. J. Stratified flow over finite obstacles with weak stratification. // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1979. Vol.13, P.317-334.
199. Baines P. G., Hoinka K. P. Stratified flow over two-dimensional topography in fluid of infinite depth: a laboratory simulation. // *J. Atmos. Sci.*, 1985. Vol.42, P.1614-1630.
200. Barber N.F. The directional resolving power of an array of wave detectors. *Ocean wave spectra*. N.Y.: Engelwood Cliffs, Prentice Hall, 1963. P.137-150.

201. Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press. 1967.
202. Bell T. M. Lee waves in stratified flows with simple harmonic time dependence. // J. Fluid Mech., 1975. Vol.67(4), P.705-722.
203. Belov V.V., Dobrokhotov S.Yu., Tudorovskiy T.Ya. Operator separation for adiabatic problems in quantum and wave mechanics // J. Eng. Math.. 2006. Vol. 55. P.183-237.
204. Bleistein N. Uniform asymptotic expansions of integrals with stationary point near algebraic singularity. // Comm. Pure Appl. Maths., 1966. Vol.19, P.353-370.
205. Bleistein N. Mathematical methods for wave phenomena. Academic. 1984.
206. Bleishtein N., Handelsman R. A. Asymptotic expansions of integrals. Dover. 1986.
207. Blumen W., McGregor C. D. Wave drag by three-dimensional mountain lee-waves in nonplanar shear flow. // Tellus, 1976. Vol.28, P.287-298.
208. Bonneton P., Chomaz J.-M. Instabilites du sillage genere par une sphere. // C. R. Acad. Sci. Paris II, 1992. Vol. 314, P.1001-1006.
209. Born M., Wolf E. Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7-th, exp.ed. Cambridge: Cambridge University Press., 1999. 952 pp.

210. Borovikov V.A. Uniform stationary phase method. IEE electromagnetic waves, Series 40. London, 1994. 233 pp.
211. Borovikov V.A., Bulatov V.V. On the applicability of limits of asymptotic formulas for the field of internal waves excited by a moving source // *Izv.Akad.Nauk SSSR. Atm.Oceanic Physics*, 1986. № 6, P.508-510.
212. Borovikov V.A., Bulatov V.V., Kelbert M.Ya. Intermediate asymptotic behavior of the far field of internal waves in a layer of stratified fluid lying on a homogeneous layer // *Izv.Akad.Nauk SSSR. Fluid Dynamics*, 1988. № 3, P.453-456.
213. Borovikov V.A., Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., Levchenko E.S. Internal wave field generated by a source rest in a moving stratified fluid // *Appl.Mech.Techn.Phys.*, 1989. № 4, P.563-566.
214. Borovikov V.A., Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., et.al. Processing and analysis of internal wave measurements in the shelf region of Western Sahara. // *Oceanology*, 1994. №4, P.457-460.
215. Borovikov V.A., Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves excited by a body moving in a stratified fluid // *Fluid Dyn. Res.*, 1995. Vol.5, P.325-336.
216. Borovikov V.A., Bulatov V.V., Gilman M.A., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves excited by a body moving an a stratified fluid. Preprints of Twenty-Second Symposium of Naval Hydrodynamics, Washington, D.C., U.S.A., 1998. P.92-99.

217. Borovikov V.A., Bulatov, V.V., Morozov E.G. Localization of tidal internal waves in the tropical Atlantic: nonspectral and spectral approaches. Proceeding of the Fourth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. SIAM, Golden, Colorado, U.S.A., 1998. P.787-789.
218. Borovikov V.A., Bulatov V.V., Morozov E.G., Tamaya R.G. Nonspectral and spectral approach to the study of tidal internal wave propagation in the ocean (by the example of the Mesopolygon experiment) // Oceanology, 1998. N 3, P.307-311.
219. Borovikov V.A., Kinber B.Ye. Geometrical theory of diffraction // IEE Electromagnetic Series. Stevenage: IEE, 1994. Vol.37.
220. Borovikov V.A., Vladimirov Yu.V., Kelbert M.Y. Field of internal gravity waves excited by localized sources // Izv.Akad.Nauk SSSR. Atm.Oceanic Physics, 1984. № 6, P.494-498.
221. Boyer D. L., Davies P. A., Fernando H. J. S., Zhang X. Linearly stratified flow past a horizontal circular cylinder. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. , 1989. Vol.328, P.501-528.
222. Brekhovskikh L.M., Goncharov V.V. Mechanics of Continua and Wave Dynamics. Springer. 1985.
223. Brekhovskikh L.M, Godin O.A. Acoustic of layered media 1: Plane and quasy-plane waves. 2-nd ed., updated. Berlin: Springer Verlag, 1998. 242 pp.

224. Brekhovskih L.M, Godin O.A. Acoustic of layered media 2: Point sources and bounded beams. 2-nd ed., updated. Berlin: Springer Verlag, 1999. 524 pp.
225. Broutman D., Macaskill C., McIntyre M.E., Rottman J.W. On Doppler-spreading models of internal waves // *Geophys.Res.Lett.*, 1997. Vol.24, P.2813-2816.
226. Brown M.G. The Maslov integral representation of slowly varying dispersive wavetrains in inhomogeneous media // *Wave Motion*. 2000. V. 32. P. 247-266.
227. Bulatov V.V. Steady motion of stratified fluid over a rough bottom // *J.Appl.Mech.Techn.Phys.*, 1991. № 5, P.678-683.
228. Bulatov V.V. Non-spectral methods of analysis of the internal gravity waves measurements in ocean // *Cornell University Library*, 2007, E-Print Archive, Paper ID: physics/0707.1704, <http://arxiv.org/abs/0707.1704>
229. Bulatov V.V. Dynamics of nonharmonic internal gravity wave packets in stratified medium // *Cornell University Library*, 2008, E-Print Archive, Paper ID: physics/0808.0668, <http://arXiv.org/abs/0808.0668>
230. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves in an inhomogeneous ocean. *Advanced Experimental Technics and CAE Methods in Ship Hydro- and Aerodynamics*. Varna, 1990. Vol.1, P.46/1-46/3.

231. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves in an inhomogeneous ocean. *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*. SIAM, Philadelphia, USA, 1991. P.700-702.
232. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Near field of internal waves excited by a source in a moving stratified liquid // *Appl.Mech.Techn.Phys.*, 1991. Vol 1, P.21-25.
233. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves excited by a source in stratified horizontally inhomogeneous media // *Izv.Akad.Nauk SSSR . Fluid Dynamics*, 1991. № 1, P.102-105.
234. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves from a body moving in a stratified ocean. *Extended Abstracts of Second International Conference of Mathematical and Numerical Aspects Wave Propagation*. SIAM, Delaware, U.S.A., 1993. P.145-147.
235. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., Danilov V.G., Dobrokhotov S.Yu. On motion of the point algebraic singularity for 2D nonlinear hydrodynamical equations // *Math.Notices*, 1994. Vol 3, P.243-250.
236. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Calculation the internal gravity wave field associated with arbitrary unsteady motion of a source // *Izv.Akad.Nauk. Fluid Dynamics*, 1995. № 3, P.483-486.
237. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves from an arbitrary moving sources. *Abstracts of Third International Conference on*

- Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Mandelieu, France. SIAM-INRIA, Edited by G.Cohen, 1995. P.783-784.
238. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., Danilov V.G., Dobrokhotov S.Yu. Calculations of hurricane trajectory on the basis of V.P.Maslov hypothesis // Dokl.Akad.Nauk., 1996. Vol 2, P.6-11.
239. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Uniform far field asymptotic of internal gravity waves from a source moving in a stratified fluid layer with smoothly varying bottom // Izv.Akad.Nauk. Fluid Dynamics, 1998. Vol 3, P.388-395.
240. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Numerical simulations of internal gravity waves from an object moving in a stratified fluid on the basis of Green's function method. Proceeding of the Fourth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. SIAM, Golden, Colorado, U.S.A., 1998. P.729-731.
241. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Propagation internal gravity waves in unsteady inhomogeneous stratified medium. Proceeding of the Fourth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. SIAM, Golden, Colorado, U.S.A., 1998. P.784-786.
242. Bulatov V.V., Vladimirov Y.V. Asymptotic of the critical regimes of internal wave generation // Izv.Akad.Nauk. Fluid Dynamics, 2000. Vol 5, P.734-737.

243. Bulatov V.V., Vakorin V.A., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves in a stratified fluid with smoothly varying bottom. Cornell University Library, 2004. E-Print Archive, Paper ID: physics/0411016, <http://arxiv.org/abs/physics/0411016>.
244. Bulatov V.V., Vakorin V.A., Vladimirov Yu.V. Weak singularity for two-dimensional nonlinear equations of hydrodynamics and propagation of shock waves. Cornell University Library, 2004. E-Print Archive, Paper ID: math-ph/0410058, <http://arxiv.org/abs/math-ph/0410058>.
245. Bulatov V.V., Vakorin V.A., Vladimirov Yu.V. Critical regimes of internal gravity wave generation. Cornell University Library, 2005. E-Print Archive, Paper ID: math-ph/0511083, <http://arxiv.org/abs/math-ph/0511083>
246. Bulatov V.V., Vakorin V.A., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves in stratified horizontally inhomogeneous media. Cornell University Library, 2005. E-Print Archive, Paper ID: math-ph/0511082, <http://arxiv.org/abs/math-ph/0511082>
247. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. General problems of the internal gravity waves linear theory // Cornell University Library, 2006. E-Print Archive, Paper ID: physics/0609236, <http://arxiv.org/abs/physics/0609236>
248. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Dynamics of the internal gravity waves in the heterogeneous and nonstationary stratified mediums // Cornell University Library, 2006. E-Print Archive, Paper ID: physics/0611040, <http://arxiv.org/abs/physics/0611040>

249. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Green modified function of the equation of the internal gravity waves in the stratum of the stratified medium with constant average flow// Cornell University Library, 2007. E-Print Archive, Paper ID: physics/0701254, <http://arxiv.org/abs/physics/0701254>
250. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves: theory and applications. Moscow: Nauka Publishers, 2007. 304 pp.
251. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves near to the sources of disturbances at the critical modes of generation // Cornell University Library, 2008. E-Print Archive, Paper ID: physics/0802.3555, <http://arxiv.org/abs/0802.3555>
252. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. A modified Green's function for the internal gravitational wave equation in a layer of a stratified medium with a constant shear flow // J.Appl.Math.Mech., 2008. Vol.72. P.524-529.
253. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves in critical generation modes and in the vicinity of trajectories of motion of perturbation sources // J.Appl.Mech.Techn.Phys., 2008, Vol.49. № 5. P.762-769.

254. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Evaluation of the linear theory satisfiability limits in propagation of the internal gravity waves // Cornell University Library, 2009. E-Print Archive, Paper ID: physics/0911.3367, <http://arxiv.org/abs/0911.3367>
255. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves from nonlocal perturbation source// Cornell University Library,2009. E-Print Archive,Paper ID: physics/0911.3377, <http://arxiv.org/abs/0911.3377>
256. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Estimate of the applicability limits of a linear theory of internal waves // Izv.Akad.Nauk. Fluid Dyn., 2010, Vol.45, № 5. P.787-792
257. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Non-local boundary conditions and internal gravity wave generation // Cornell University Library, 2010. E-Print Archive, arXiv:1008.4062v1 [physics.flu-dyn], <http://arxiv.org/abs/1008.4062>
258. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Non-local boundary conditions for mathematic modeling of stratified medium wave dynamics // Adv. Appl. Math. Sciences, 2010. Vol.4. № 1. P.1-22
259. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Far fields of internal gravity waves in stratified media of variable depth // Russ. J. Math. Physics, 2010, Vol. 17. № 4. P.400-412.
260. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. The uniform asymptotic form of the

- internal gravity wave field generated by a source moving above a smoothly varying bottom // J. Eng. Math., 2011, Vol. 69, issue 2. P. 243-260.
261. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves in stratified mediums of non-uniform depth // Cornell University Library, 2011, E-Print Archive, arXiv.org : physics : physics.flu-dyn: arXiv:1110.6132 , <http://arxiv.org/abs/1110.6132>
262. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Far field of internal gravity waves from oscillating sources of disturbances // Izv. Akad. Nauk. Atmosph. Oceanic Phys., 2011, Vol. 47. № 2. P. 229-232
263. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Wave dynamics of stratified mediums. Moscow: Nauka Publishers, 2012. 584 pp.
264. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Wave field dynamics of a stratified medium with variable depth // Dokl. Earth Sci., 2012, Vol. 444, P. 626-629
265. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Fundamental problems of wave dynamics modeling in Arctic Basin // Proceeding “World Maritime Technology Conference WMTC2012”, 29 May - 1 June 2012, S.-Petersbourg, Russia.
266. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Wave dynamics of stratified mediums with variable depth: exact solution and asymptotic representation // Proceeding IUTAM Symposium 12-3=GA.10-08 “Waves in fluids: effects of non-linearity, rotation, stratification and dissipation”, 18-22 June 2012, Moscow, Russia

267. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Fundamental problems of modeling the dynamics of internal gravity waves with applications to the Arctic Basin // Cornell University Library, 2012, E-Print Archive, arXiv.org : physics : [physics.flu-dyn]: arXiv:1206.6136v1 , <http://arxiv.org/abs/1206.6136>
268. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. On the dynamics of internal waves propagating in stratified media of a variable depth: exact and asymptotic solutions // Cornell University Library, 2012, E-Print Archive, arXiv.org : physics : [physics.flu-dyn]: arXiv:1207.1741v1 , <http://arxiv.org/abs/1207.1741>
269. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves dynamics in ocean with shear flows // ADITI (Advanced and Development in Technology International) Journal of Mathematical Physics. 2013, Vol.3, Issue 1, P.15-32.
270. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Fundamental problems of internal gravity waves dynamics in ocean // Journal of Basic & Applied Sciences. 2013, Vol.9, P.69-81.
271. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Wave dynamics of stratified mediums with variable depth: exact solutions and asymptotic representations // IUTAM Procedia. 2013, Vol.8, P.229-237.
272. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves in in non-stationary stratified medium // Proceeding International Conference “Fluxes and structures in fluids”, 25-28 June 2013, S.-Petersbourg, Russia

273. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Fundamental problems of natural stratified medium wave dynamics: theory, measurements, applications // Proceeding Second International Conference «Supercomputer technologies of mathematical modeling SCTEMM-2013», 8-11 July 2013, Yakutsk, Russia
274. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. On the internal gravity waves in the stratified ocean with shear flows. Cornell University Library, 2013, E-Print Archive, arXiv.org>physics>arXiv:1308.3722, arXiv:1308.3722v1 [physics.flu-dyn], <http://arxiv.org/abs/1308.3722>
275. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. The dynamics of internal gravity waves in the ocean: theory and applications. Cornell University Library, 2013, E-Print Archive, arXiv.org>physics> arXiv:1308.3718, arXiv:1308.3718v1[physics.flu-dyn], <http://arxiv.org/abs/1308.3718>
276. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Far fields of internal gravity waves in a stratified liquid of varying depth // Izv.Akad.Nauk. Atmosph.Oceanic Phys., 2013, Vol.49. № 3. P.329-333
277. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Asymptotical analysis of internal gravity wave dynamics in stratified medium // Applied Mathematical Sciences. 2014, Vol. 8, № 5, P.217 - 240
278. Case K. M. Some properties of internal waves. // Phys. Fluids, 1978. Vol.21(1). P.18-29.
279. Castro I. P. A note on lee wave structures in stratified flow over three-dimensional obstacles. // Tellus A , 1987. Vol.39. P.72-81.

280. Castro I. P., Snyder W. H. Upstream motions in stratified flow // J. Fluid Mech., 1988. Vol. 187. P.487-506.
281. Castro I. P., Snyder W. H., Marsh G. L. Stratified flow over three-dimensional ridges // J. Fluid Mech., 1983. Vol.135. P.261-282.
282. Cerasoli C. P. Experiments on buoyant-parcel motion and the generation of internal gravity waves // J. Fluid Mech., 1978. Vol.86(2). P.247-271.
283. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. London: Oxford University Press, 1961. pp.652
284. Chang W. L., Stevenson T. N. Internal waves in a viscous atmosphere // J. Fluid Mech., 1975. Vol. 72(4). P.773-786.
285. Chaudhuri K. S. Directional variation of shallow water waves due to arbitrary periodic surface pressure // J. Phys. Soc. Japan, 1969. Vol.26(4). P.1048-1055.
286. Chee-Seng L. Water waves generated by an oscillatory surface pressure travelling at critical speed // Wave Motion, 1981. Vol.3(2). P.159-179.
287. Cheng H. K., Hefazi H., Brown S. N. Topographically generated cyclonic disturbance and lee waves in a stratified rotating fluid // J. Fluid Mech., 1984. Vol.141, P.431-453.
288. Chui C.K. An introduction to wavelets. Academic Press, 1992. pp. 266.
289. Crapper G. D. A three-dimensional solution for waves in the lee of mountains // J. Fluid Mech., 1959. Vol.6, P.51-76.

290. Crapper G. D. Waves in the lee of a mountain with elliptical contours // Phil. Trans. R. Soc. Lond., 1962. Vol.A 254, P.601-623.
291. Dagan G. Waves and wave resistance of thin bodies moving at low speed: the free-surface nonlinear effect // J. Fluid Mech., 1975. Vol.69(2), P.405-416.
292. Dagan G., Miloh T. Free-surface flow past oscillating singularities at resonant frequency // J. Fluid Mech., 1982. Vol.120, P.139-154.
293. Dahlqvist H., Kallen E. Field experiments to study internal wave generation in the Baltic. FOA Rapport C20834-2.7. 1991.
294. Dobrokhotov S.Yu., Lozhnikov D.A. , Vargas C.A. Asymptotics of waves on the shallow water generated by spatially-localized sources and trapped by underwater ridges // Rus. J. Math. Physics. 2013. Vol. 20. P. 11-24.
295. Donan K., Sutherland B.R. Numerical and laboratory generation of internal waves from turbulence // Dyn.Atmosph.Oceans, 2005. Vol.40. P.43-56.
296. Doong, B.C. Kao C.C. Wave measurement using GPS velocity signal // Sensors, 2011. Vol.11. .P. 1043-1058.
297. Drazin P. G. On the steady flow of a fluid of variable density past an obstacle // Tellus, 1961.Vol. 13, P.239-251.
298. Dugan J. P., Warn-Varnas A. C., Piacsek S. A. Numerical results for laminar mixed region collapse in density stratified fluid. // Computers and Fluids, 1976. Vol.4(2). P.109-121.

299. Echeverri P., Peacock T. Internal tide generation by arbitrary two-dimensional topography // *J.Fluid Mech.*, 2010, Vol.659, P.247-266
300. Echeverri P., Yokossi T., Balmforf N.J., Peacock T. Tidally generated internal wave attractors between double ridges // *J.Fluid Mech.*, 2011, Vol.669, P.354-374
301. Eckart C. Internal waves in the ocean // *Phys. Fluids*, 1961. Vol.4(7). P.791-799.
302. Ekman V.W. On dead water: the Norwegian north polar expedition 1893-1896. Scientific Results. Edited by F.Nansen. Ch. CV. A.IW. Brogger. Kristiania, 1904. pp.152
303. Engevik L. On the indeterminacy of the problem of stratified fluid flow over a barrier and related problems // *Z. Angew. Math. und Phys.*, 1975. Vol.26(6). P.831-834.
304. Farell C. On the wave resistance of a submerged spheroid // *J. Ship. Res.*, 1973. Vol.17(1). P.1-11.
305. Felsen L. B. Transients in dispersive media, Part I: Theory // *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1969. Vol.17, P.191-200.
306. Felsen L.B. Hybrid ray-mode fields in inhomogeneous waveguides and ducts // *J.Acoust.Soc.Amer.* 1981.Vol.69, №.2. P.352-361.
307. Flynn M.R., Sutherland B.R. Intrusive gravity currents and internal gravity wave generation in stratified fluid // *J.Fluid Mech.*, 2004. Vol.514. P.355-383.

308. Fox, D. W. Transient solutions for stratified fluid flows // J. Res. Nat. Bur. Stand., 1976. Vol. B80(1). P.79-88.
309. Fructus D., Carr M., Grue J., Jensen A., Davies P.A. Shear induced breaking of large internal solitary waves // J.Fluid Mech.,2009.Vol. 620, P.1-29.
310. Garret C. Internal tides and ocean mixing // Science, 2003, Vol.301, No.5641, P.1858- 1859
311. Garret C.J.R., Munk W.H. Internal waves in the ocean // Ann.Rev.Fluid Mech., 1979. Vol.11, P.339-369.
312. Garrett C., Kunze E. Internal tide generation in the deep ocean // Rev. Fluid Mech., 2007. Vol. 39, P. 57-87.
313. Gärtner U. A note on the visualization and measurement of the internal wave field behind a cylinder moving through a stratified fluid. // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 1983. Vol.26, P.139-145.
314. Gärtner U. Visualization of particle displacement and flow in stratified salt water // Exp. Fluids, 1983. Vol.1, P.55-56.
315. Gärtner U., Wernekinck U., Merzkirch W. Velocity measurements in the field of an internal gravity wave by means of speckle photography. // Exp. Fluids, 1986. Vol.4, P.283-287.
316. Gerkema T. Application of an internal tide generation model to baroclinic spring-neap cycles // J.Geophys.Res., 2002. Vol.107, P.1(7)-7(7).
317. Gill A.E. Atmosphere-ocean dynamics. Academic, 1982.

318. Gilreath H. E., Brandt A. Experiments on the generation of internal waves in a stratified fluid // AIAA J., 1985. Vol.23, P.693-700.
319. Gitterman M. Hydrodynamics of compressible liquids: influence of the piston effect on convection and internal gravity waves // Physica A, 2007. Vol.386, P.1-11.
320. Goodman L., Levine E. R. Generation of oceanic internal waves by advecting atmospheric fields // J. Geophys. Res., 1977. Vol.82(12). P.1711-1717.
321. Gordon D., Klement U. R., Stevenson T. N. A viscous internal wave in a stratified fluid whose buoyancy frequency varies with altitude.// J. Fluid Mech., 1975. Vol.69(3). P.615-624.
322. Gordon D., Stevenson T. N. Viscous effects in a vertically propagating internal wave.// J. Fluid Mech., 1972. Vol.56, P.629-639.
323. Gorgui M. A., Kassem S. E. Basic singularities in the theory of internal waves. // Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1978. Vol.31(1). P.31-48.
324. Gossard E. E., Hooke W. H. Waves in the atmosphere. Amsterdam – Oxford-New York: Elsevier Scientific Publ., 1975.
325. Gradstein I.S., Ryshik I.M. Table of integrals, series and products. Academic, 1980.
326. Graevel W. P. On the slow motion of bodies in stratified and rotating fluids. // Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1969. Vol.22(1). P.39-54.

327. Graham E. W. Transient internal waves produced by a moving body in a tank of density-stratified fluid. // *J. Fluid Mech.*, 1973. Vol.61(3). P.465-480.
328. Graham E. W., Graham B. B. The tank wall effect on internal waves due to a transient vertical force moving at fixed depth in a density stratified fluid. // *J. Fluid Mech.*, 1980. Vol. 97(1). P.91-114.
329. Gray E.P., Hart R.W., Farrel R.A.. The structure of the internal wave Mach front generated by a point source moving in a stratified fluid. // *Phys. Fluids*, 1983. Vol.10. P.2919-2931.
330. Grue J. Very large internal waves in the ocean – observations and nonlinear models. Ch. 5, P.205-270. in: J.Grue and K. Trulsen (eds.): *Waves in geophysical fluids. Tsunamis, rogue waves, internal waves and internal tides. CISM Courses and Lectures No. 489.* Springer, 2006.
- 331.** Grue J., Gabrielsen R.H. (Eds.). *Marine transport in the High North.* Oslo, Novus Forlag, Det Norske Videnskaps-Akademi– Norges tekniske Vitenskapsakademi, 2011.
332. Grue J., Jensen A., Rusas P.O. , Sveen J.K. Properties of large amplitude internal waves // *J.Fluid Mech.*, 1999. Vol.380, P.257-278.
333. Grue J., Jensen A. Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves. // *J. Geophys. Research.* 2012. Vol.117. P. C07-C013.
334. Grue J., Palm E. Wave radiation and wave diffraction from a submerged body in a uniform current. // *J. Fluid Mech.*, 1985. Vol.151. P.257-278.

335. Grue J., Sveen J.K. A scaling law of internal run-up duration // *Ocean Dynamics*, 2010. Vol.60. P.993-1006.
336. Han T. Y., Meng J. C. S., Innis G. E. An open boundary condition for incompressible stratified flows. // *J. Comput. Phys.*, 1983. Vol.49(2), P.276-297.
337. Hanazaki H. A numerical study of three-dimensional stratified flow past a sphere. // *J. Fluid Mech.*, 1988. Vol.192, P.393-419.
338. Hanazaki H. Drag coefficient and upstream influence in three-dimensional stratified flow of finite depth. // *Fluid Dyn. Res.*, 1989. Vol 4, P.317-332.
339. Harband J. Three-dimensional flow over a submerged object. // *J. Eng. Math.*, 1976. Vol.10(1), P.1-21.
340. Hartman R. J., Lewis H. W. Wake collapse in a stratified fluid: linear treatment. // *J. Fluid Mech.*, 1972. Vol. 51, P.613-618.
341. Hearn G. E. Alternative methods of evaluating Green's function in three-dimensional ship-wave problems. // *J. Ship Res.*, 1977. Vol.21(2). P.89-93.
342. Higuchi H., T. Kubota T. Axisymmetric wakes behind a slender body including zero-momentum configurations. // *Phys. Fluids A*, 1990. Vol.2, P.1615-1623.

343. Hodges B.R., Imberger J., Saggio A., Winters K. Modelling basin-scale internal waves in a stratified lake. // *Limnol.Oceanogr.*, 2000. Vol.145, P.1603-1620.
344. Holschneider M. Wavelets: an analysis tool. Oxford: Clarendon Press,1995, pp. 426.
345. Hoppensteadt F.C. Quasi-steady state analysis of differential, difference, integral and gradient systems. Courant Lecture Notes 21, Amer Math Soc. , 2010.
346. Hopfinger E.J. Turbulence in stratified fluids: a review. // *J.Geophys.Res.*, 1987. Vol.92, P.5287-5303.
347. Hopfinger E. J., Flor J.-B., Chomaz J.-M., Bonneton P. Internal waves generated by a moving sphere and its wake in a stratified fluid. // *Exp. Fluids*, 1991. Vol.11. P.255-261.
348. Horn D.A., Redekopp L.G., Imberger J., Ivey G.N. Internal wave evolution in a space-time varying field. // *J.Fluid Mech.*, 2000. Vol.424, P.279-301.
349. Hosegood P., H.van Haren Near-bed solibores over the continental slope in the Faeoe-Shetland Channel // *Deep-Sea Res.*, 2004. Vol.51, P.2943-2971.
350. Hsu M.K., Liu A.K., Liu C. A study of internal waves in the China Seas and Yellow Sea using SAR // *Continental Shelf Research*, 2000. Vol. 20. P. 389-410.

351. Hudimac A. Ship waves in a stratified ocean. // J. Fluid Mech., 1961. Vol.11. P.229-243.
352. Hunt J. C. R., Snyder W. H. Experiments on stably and neutrally stratified flow over a model three-dimensional hill.// J. Fluid Mech., 1980. Vol. 96, P.671-704.
353. Hurdis D. A., Pao H.-P. Observations of wave motion and upstream influence in a stratified fluid. // J. Appl. Mech., 1976. Vol.43(2). P.22-226.
354. Hurley D. G. The emission of internal waves by vibrating cylinders. // J. Fluid Mech., 1969. Vol.36(4). P.657-672.
355. Hurley D. G. A general method for solving steady-state internal gravity wave problems. // J. Fluid Mech., 1972. Vol.56, P.721-740.
356. Hyun J. M. Internal wave dispersion in deep oceans calculated by means of two-variable expansion techniques. // J. Oceanogr. Soc. Jap., 1976. Vol.32(1). P.11-20.
357. Hyun J. M. Internal wave dispersion in density-stratified deep oceans with a thermocline. // J. Oceanogr. Soc. Jap., 1977. Vol.33(1). P.16-22.
358. Janowitz G. S. On wakes in stratified fluids. // J. Fluid Mech., 1968. Vol.33(3). P.417-432.
359. Janowitz G. S. The slow transverse motion of bodies of a flat plate through non-diffusive stratified fluid. // J. Fluid Mech., 1971. Vol.47(1). P.171-181.

360. Janowitz G. S. Line singularities in unbounded stratified flow. // J. Fluid Mech., 1974. Vol. 66(3). P.455-464.
361. Janowitz G.S. Stratified flow over a bounded obstacle in a channel of finite height // J. Fluid Mech., 1981. Vol.110. P.161-170.
362. Janowitz G.S. Lee waves in a three-dimensional stratified flow. // J. Fluid Mech., 1984. Vol.148. P.97-108.
363. Jeffreys H. Asymptotic approximation. London: Oxford University Press, 1962, 144 pp.
364. Johnston T.M., Merrifield M.A. Internal tide scattering at seamounts, ridges and islands. // J.Geophys.Res., 2003. Vol.108, P.1(11)-17(11).
365. Jones W.L. Ray traicing for internal gravity waves. // J. Geoph. Res., 1969. Vol.8, P.2028-2033.
366. Jung-Tai Lin, Yih-Ho Pao Wakes in a stratified fluids. // Ann. Rev. Fluids Mech., 1979. Vol.11. P.317-338.
367. Kallen E. Surface effects of vertically propagation waves in a stratified fluid. // J. Fluid Mech., 1987. Vol.182. P.111-125.
368. Kamachi M., Honji H. Interaction of interfacial and internal waves. // Fluid Dyn. Res., 1988. Vol.2. P.229-241.
369. Kao T. W., Pao H.-P. Wake collapse in the thermocline and internal solitary waves. // J. Fluid Mech., 1980. Vol.97(1). P.115-127.
370. Keller J.B. Surface waves on water of non-uniform depth. // J. Fluid Mech., 1958. Vol.6. P.607-614.

371. Keller J.B., Levy D.M., Ahluwalia D.S. Internal and surface wave production in a stratified fluid. // *Wave Motion*, 1981. Vol.3. P.215-229.
372. Keller J.B., Mow Van C. Internal wave propagation in a inhomogeneous fluid of non-uniform dept. // *J. Fluid Mech.*, 1969. Vol.2. P.365-374.
373. Keller J. B., Munk W. H. Internal wave wakes of a body moving in a stratified fluid. // *Phys. Fluids*, 1970. Vol.6. P.1425-1431.
374. Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D. Regular and singular components of periodic flows in the fluid interior // *J. Appl. Math. Mech.*. 2007. Vol.71, P.762-771
375. Khatiwala S. Generation of internal tides in an ocean of finite depth: analytical and numerical calculations . // *Deep Sea Research*, 2003. Vol.50. P.3-21.
376. Kranzer H. C., Keller J. B. Water waves produced by explosions. // *J. Appl. Phys.*, 1959. Vol.30(3). P.398-407.
377. Kravtsov Yu.A. Geometrical optics in engineering physics. Harrow: Alpha Science, 2005. 355 pp.
378. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. Caustics, catastrophes and wave field. 2-nd ed., updated. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998
379. Laurent L.T., Stringer S., Garret C., Perraut-Joncas D. The generation of internal tides at abrupt topography. // *Deep-Sea Res.*, 2003. Vol.50. P.987-1003.

380. Le Blond P. H., Mysak L. A. Waves in the ocean. Amsterdam: Elsevier Scientific Publ,1978.
381. Legg S. Internal tides generated on a corrugated continental slope. Part 1: Cross-slope barotropic forcing. // J. Phys. Oceanography, 2004. Vol.34(1). P.156-173.
382. Liandrat J., Moret-Bailly F. The wavelet transform: some applications to fluid dynamics and turbulence. // Europ. J. Mech., B/Fluids, 1990. Vol.1. P.1-19.
383. Lighthill M. J. Introduction to Fourier analysis and generalised functions. Cambridge : Cambridge University Press, 1958.
384. Lighthill M. J. Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 1960. Vol.252. P.397-430.
385. Lighthill M. J. Group velocity. // J. Inst. Maths Applies, 1965. Vol. 1. P.1-28.
386. Lighthill M. J. Waves in fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1978..
387. Lighthill M. J. An informal introduction to theoretical fluid mechanics. Oxford : Oxford University Press, 1986.
388. Lin J.-T., Pao Y.-H. Wakes in stratified fluids. // Ann. Rev. Fluid Mech., 1979. Vol. 11. P.317-338.

389. Lin Q., Lindberg W. R., Boyer D. L., Fernando H. J. S. Stratified flow past a sphere. // *J. Fluid Mech.*, 1992. Vol.240. P.315-354.
390. Liu J. T. C. Generation of interfacial gravity waves by submerged regions of fluctuating hydrodynamical motions and fluid inhomogeneities. // *Phys. Fluids*, 1979. Vol.22(5). P.814-818.
391. Lofquist K. E. B., Purtell L. P. Drag on a sphere moving horizontally through a stratified liquid. // *J. Fluid Mech.*, 1984. Vol.148. P.271-284
392. Mauge R., Gerkema T. Generation of weakly nonlinear nonhydrostatic internal tides over large topography: a multi-modal approach // *Nonlinear Processes Geophysics*, 2008. Vol.15, P.233–244
393. McLaren T. I., Pierce A. D., Foul T., Murphy B. L. An investigation of internal gravity waves generated by a buoyantly rising fluid in a stratified medium. // *J. Fluid Mech.* , 1973. Vol.57. P.229-240.
394. Mei C. C. Flow around a thin body moving in shallow water. // *J. Fluid Mech.*, 1976. Vol.77(4). P.737-751.
395. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. Theory and applications of ocean surface waves. Advanced series of ocean engineering. V. 42. World Scientific Publishing, 2017. 1500 p.
396. Meng J.C.S., Rottman Linear internal waves generated by density and velocity perturbations in a linearly stratified fluid. // *J. Fluid Mech.*, 1988. Vol.186. P.419-444

397. Miles J. W. Transient gravity wave response to an oscillating pressure. // J. Fluid Mech., 1962. Vol.13(1). P.145-150.
398. Miles J. M. Lee waves in stratified flow. Pt. 2. Semi-circular obstacle. // J. Fluid Mech., 1968. Vol.33(4). P.803-814.
399. Miles J. W. Internal waves generated by a horizontally moving source. // Geophys. Fluid Dyn., 1971. Vol.2, P.63-87.
400. Miles J. W. Internal waves in a sheeted thermocline. // J. Fluid Mech., 1972. Vol.53(3). P.557-573.
401. Miles J.W., Chamberlain P.G. Topographical scattering of gravity waves. // J. Fluid Mech., 1998. Vol.361. P.175-188
402. Miloh T., Dagan G. A study of nonlinear wave resistance using integral equations in Fourier space. // J. Fluid Mech., 1985. Vol.159. P.433-458.
403. Miropol'skii Yu. Z., Shishkina O.V. Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.
404. Morozov E.G. Internal tides. Global field of internal tides and mixing caused by internal tides. Waves in geophysical fluids. Wein - New York: Springer, 2006
405. Morozov E., Demidov A., Tarakanov R., Zenk W. Abyssal channels in the Atlantic ocean: water structure and flows. Springer, 2010.
406. Morozov E.G., Velarde M.G. Inertial oscillations as deep ocean response to hurricanes // J.Oceanography, 2008. Vol.64. P.495-509.

407. Mowbray D. E., Rarity B. S. H. A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid. // *J. Fluid Mech.* , 1967. Vol.28. P.1-16.
408. Mowbray D. E., Rarity B. S. H. The internal wave pattern produced by a sphere moving vertically in a density stratified liquid. // *J. Fluid Mech.*, 1967. Vol. 30. P.489-495.
409. Muller P., Liu X. Scattering of internal waves at finite topography in two dimensions. Part I: theory and case studies. // *J. Phys.Oceanogr.*, 2000. Vol.30. P.532-549.
410. Muller P., Liu X. Scattering of internal waves at finite topography in two dimensions. Part II: spectral calculations and boundary mixing. // *J. Phys.Oceanogr.*, 2000. Vol. 30. P.550-563.
411. Munk W., Worcester P., Wunsch C. Ocean acoustic tomography. Cambridge: Cambridge Univ.Press.1995. 433 pp.
412. Munk W., Wunsch C. Ocean acoustic tomography: rays and modes // *Rev.Geophys.Space Phys.*. 1983. Vol.21. P.777-793.
413. Nansen F. Farthest North: The epic adventure of a visionary explorer. Skyhorse Publishing, 1897
414. Nansen F. The oceanography of the North Polar Basin. The Norwegian North Polar Expedition 1893-1896. Scientific Results, edited by Fridtjof Nansen. Kristiania. Printed by A.W. Brogger, 1902.
415. Newman J. N. Marine hydrodynamics. Cambridge: MIT Press, 1977.

416. Newman J. N. Double-precision evaluation of the oscillatory source potential. // J. Ship Res., 1984. Vol.28(3). P.151-154.
417. Newman J. N. Algorithms for the free-surface Green function. // J. Eng. Math., 1985. Vol.19(1). P.57-67.
418. Noblesse F. Alternative integral representations for the Green function of the theory of ship wave resistance. // J. Eng. Math., 1981. Vol.15(4). P.241-265.
419. Noblesse F. The Green function in the theory of radiation and diffraction of regular water waves by a body. // J. Eng. Math., 1982. Vol.16(2). P.137-169.
420. Orlanski I., Ross B. B. Numerical simulation of the generation and breaking of internal gravity waves. // J. Geophys. Res., 1973. Vol.78(36). P.8806-8826.
421. Peat K. S., Stevenson T. N. Internal waves around a body moving in a compressible density-stratified fluid. // J. Fluid Mech., 1975. Vol. 70. P.673-688.
422. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 pp.
423. Perry R.B., Schimke G.R. Large amplitude internal waves observed off the North West Coast of Sumatra // J.Geophys. Res. 1965. Vol.70(10).P. 2319-2324.

424. Peters F. Schlieren interferometry applied to a gravity wave in a density-stratified liquid. // *Exp. Fluids*, 1985. Vol.3(5). P.261-269.
425. Phillips O. M. The dynamics of the upper ocean. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1977.
426. Pidcock M. K. The calculation of Green's functions in three dimensional hydrodynamic gravity wave problems. // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1985. Vol.5(10). P.891-909.
427. Pramanik A. K., Majumdar S. R. Capillary-gravity waves generated in a viscous fluid. // *Phys. Fluids*, 1985. Vol.28(1). P.46-51.
428. Ramirez C., Renouard D. Generation of internal waves over shelf. // *Dyn. Atmosph. Oceans*, 1998. Vol.2. P.107-125.
429. Rao A. R. Green's function solution of a water wave problem in a stratified ocean of finite depth. // *Int. J. Eng. Sci.*, 1979. Vol.17(5). P.527-532.
430. Rehm R. G., Radt H. S. Internal waves generated by a translating oscillating body. // *J. Fluid Mech.*, 1975. Vol. 68. P.235-258.
431. Schooley A. A., Hughes B. A. An experimental and theoretical study of internal waves generated by the collapse of a two-dimensional mixed region in a density gradient. // *J. Fluid Mech.*, 1972. Vol.51(1). P.159-175.
432. Sharman R. D., Wurtele M. G. Ship waves and lee waves. // *J. Atmos. Sci.*, 1983. Vol. 40. P.396-427.
433. Simpson J. E. Gravity currents in the laboratory, atmosphere, and ocean. // *Ann. Rev. Fluid Mech.* , 1982. Vol. 14., P.213-234.

434. Snyder W. H., Thompson R. S., Eskridge R. E., Lawson R. E., Castro I. P., Lee J. T., Hunt J. C. R., Ogawa Y. The structure of strongly stratified flow over hills: dividing-streamline concept. // *J. Fluid Mech.*, 1985. Vol.152. P.249-288.
435. Sobolev S. L. Sur une classe des problemes de physique mathematique. Simposio Internazionale Sulle Applicazioni Dell'Analisi Alia Fisica Matematica, Cagliari-Sassari, September 28-October 4 1964, Edizioni Cremonese (Roma), pp. 192-208.
436. Song Z.J., Gou B.Y., Lua L., Shi Z.M., Xiao Y., Qu Y. Comparisons of internal solitary wave and surface wave actions on marine structures and their responses // *Appl. Ocean Res.*, 2011. Vol.33 , P.120-129.
437. Staquet C., Sommeria J. Internal gravity wave: from instabilities to turbulence. // *Ann. Rev Fluid Mech.*, 2002. Vol.34. P.559-593.
438. Stevenson T. N., Woodhead T. J., Kanellopulos D. Viscous effects in some internal waves. // *Appl. Sci. Res*, 1983. Vol.40. P.185-197.
439. Sutherland B.R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 pp.
440. Suzuki M., Kuwahara K. Stratified flow past a bell-shaped hill. // *Fluid Dyn. Res.* , 1992. Vol.9., P.1-18.
441. Taylor J.R., Sarkur S. Internal gravity waves generated by a turbulent bottom Ekman layer // *J. Fluid Mech.*, 2007. Vol.590. P.331-354.

442. Thomas N. H., Stevenson T. N. An internal wave in a viscous ocean stratified by both salt and heat. // J. Fluid Mech., 1973. Vol.61(2). P.301-304.
443. Thorpe S.A. The excitation, dissipation and interaction of internal waves in deep ocean. // J. Geoph. Res., 1975. Vol.3. P.329-338.
444. Thorpe S.A.. On the breaking of internal waves in the ocean. // J. Phys. Oceanogr., 1999. Vol.29. P.2433-2441.
445. Tolstoy I. Wave propagation. McGraw-Hill, 1973.
446. Turner J.S. Buoyancy effects in fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1973, 367 pp.
447. Vlasenko V., Staschuk N. Hutter K. Baroclinic tides: theoretical modeling and observational evidence. Cambridge University Press, 2005, 352 pp.
448. Voisin B. Internal wave generation in uniformly stratified fluid. Part 1. Green's function and point sources // J. Fluid Mech., 1991. Vol.231. P.439-480.
449. Voisin B. Rayonnement des ondes internes de gravite. Application aux corps en mouvement. Ph.D. thesis, Universite Pierre et Marie Curie, 1991.
450. Voisin B. Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part II. Moving point sources // J. Fluid Mech., 1994. Vol.261. P.333-374.
451. Voizin B. Limit states of internal wave beams // J.Fluid Mech., 2003, Vol.496, P.243-293

452. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions (2nd edn).  
Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
453. White R.B. Asymptotic analysis of differential equations. London:  
Imperial College Press, 2005.
454. Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. New York: Academic  
Press, 1974.
455. Wickerts S., Kallen E. Observations and modeling on internal waves in a  
strongly stratified ocean // FOA rapport C20784-2.7, 1990.
456. Winters K.B., Lombard P.N., Riley J.J., D'Asaro E.A. Available  
potential energy and mixing in density-stratified fluids // J.Fluid Mech., 1995.  
Vol.289. P.115-124.
457. Wolfe P., Lewis R.M. Progressing waves radiated from a moving point  
source in an inhomogeneous media // J. Diff. Equat., 1966. Vol.3, P.328-350.
458. Woodward P., Collela P.J. The numerical simulation of two-dimensional  
fluid flow// Computer Physics, 1984, Vol.54, P.115-173.
459. Wu J. Mixed region collapse with internal wave generation in a density-  
stratified medium // J. Fluid Mech., 1969. Vol.35. P.531-544.
460. Wunsch C. On the propagation of internal waves up a slope // Deep-Sea  
Res., 1968. Vol.15. P.251-258.
461. Yang-Yih Chen, Guan-Yu Chen, Chia-Hao Lin, Chiu-Long Chou.  
Progressive waves in real fluids over a rigid permeable bottom. // Coastal Eng.  
J.. 2010. Vol.52. №1. P. 17-42.

462. Yanovitch M. Gravity waves in a heterogeneous incompressible fluid // Comm. Pure Appl. Math., 1962. Vol.1. P.45-61.
463. Yeung R.W., Rhines P.B., Garrett C.J.R. Shear-Flow dispersion, internal waves and horizontal mixing in the ocean // J. Phys. Oceanogr., 1982. Vol.12. P.515-527.

## **СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**





Булатов Виталий Васильевич – родился 22 марта 1961 года в городе Москве, в 1984 году окончил с отличием физический факультет МГУ им.М.В.Ломоносова по специальности «квантовая статистика и квантовая теория поля». С 1984 года работает в Институте проблем механики АН СССР, в настоящее время - Институт проблем механики РАН им.А.Ю.Ишлинского. Доктор физико-математических наук, доктор экономических наук, профессор. В 1992 году защитил кандидатскую диссертацию «Расчет и анализ измерений внутренних гравитационных волн от движущихся в стратифицированной жидкости источников» по специальности «механика жидкости, газа и плазмы». В 2003 году защитил докторскую диссертацию «Фондовый рынок в структурной перестройке экономики» по специальности «финансы, денежное обращение и кредит». В 2009 году защитил докторскую диссертацию «Математическое

моделирование динамики негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах» по специальности «математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». В 2010 году присвоено ученое звание профессора. Научный руководитель 15 кандидатов наук. С 2003 года действительный член РАЕН, секция «Проблемы макроэкономики и социального рыночного хозяйства». Автор более 300 опубликованных научных работ, в том числе 25 монографий в области математического моделирования, гидрофизики, волновой динамики сложных сред, финансов, фондового рынка, экономической теории. С 1997 года – профессор Православного Свято-Тихоновского гуманитарного университета. С 2000 года эксперт научно-технической сферы Министерства образования и науки РФ. С 2000 года входит в состав органов управления и контроля российских компаний, в том числе с государственным участием: «РАО «Норильский никель», «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им.С.П.Королева», «Научно-исследовательский институт физических измерений», «Научно-исследовательский институт охраны атмосферного воздуха», «Енисейское речное пароходство», «Союзморгео», «Полярная экспедиция». «Кавказгидрогеология», «Тульское научно-исследовательское геологическое предприятие», Управляющая компания «Роснефть-траст», Управляющая компания «Индекс-ХХ», Банк «Церих», «Калининградгеофизика», «Дальморнефтегеофизика», «Российский сельскохозяйственный банк», «Научно-исследовательский центр по изучению

свойств поверхности и вакуума», «Гознак-лизинг», «Большая Российская энциклопедия». Персональный WEB site: [www.bulatov.su](http://www.bulatov.su)

## **Основные научные труды**

### **Монографии**

1. Булатов В.В. Проблемы структурной перестройки экономики и фондового рынка. М.: Институт экономики РАН. 2001, 287 с.
2. Булатов В.В. Фондовый рынок в структурной перестройке экономики. М.: Наука, 2002, 416 с.
3. Булатов В.В. Экономический рост и фондовый рынок. М.: Наука, 2004, в 2-х томах (том 1 – 353с., том 2 - 256 с.)
4. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. М.: Наука, 2005, 195 с.
5. Булатов В.В. Микроэкономика. М.: Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, 2006, 148 с.
6. Булатов В.В. Государство и рыночные механизмы (очерки теории и практики) М.: Институт экономики РАН. 2006, 174 с.
7. Булатов В.В. Очерки современной экономической теории и практики. М.: Наука, 2007, 232 с.
8. V.V.Bulatov, Y.V.Vladimirov Internal gravity waves: theory and applications. Moscow: Nauka Publishers, 2007, 304 pp.
9. Булатов В.В. Основы микроэкономики. М.: Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, 2008, 224 с.

10. Булатов В.В. Современные модели финансовых рынков. М.: Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, 2009.
11. Булатов В.В. Новая архитектура фондового рынка и финансового пространства России. М.: Наука, 2009, 375 с.
12. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010, 470 с.
13. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновые движения стратифицированных сред: теория и приложения Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2012, 577 с.
14. V.V.Bulatov, Yu.V.Vladimirov Wave dynamics of stratified mediums. Moscow: Nauka Publishers, 2012, 584 pp.
15. Булатов В.В (коллектив авторов) Математические основы информационной безопасности. М.: НИИ электроники и лазерной техники МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2013, 244 с.
16. Булатов В.В. Математическое моделирование сложных систем. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 348с.
17. Bulatov V.V. (co-authors). Mathematical foundations of information security (in English) М.: НИИ электроники и лазерной техники МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2014, 200 с.
18. V.Bulatov Mathematical modeling of complex systems: theory and applications. Scholar's Press. 2015, 267 pp.

19. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015, 735 с.

20. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Тория волновых движений неоднородных сред. Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017, 580 с.

### Статьи

1. Боровиков В.В., Булатов В.В. О границах применимости асимптотических формул для поля внутренних волн, возбуждаемых движущимся источником // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1986, Т.22, № 6, С.658-661.
2. Боровиков В.А., Булатов В.В., Кельберт М.Я. О промежуточной асимптотике дальнего поля внутренних волн в слое стратифицированной жидкости, лежащем на однородном слое // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988, № 3, С.158-162
3. Боровиков В.А., Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Левченко Е.С. О расчете поля внутренних гравитационных волн, генерируемых неподвижным источником в потоке стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики. 1989, № 4, С.58-61.
4. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в неоднородной по горизонтали среде // Морской гидрофизический журнал. 1989, № 6, С.14-19.

5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в нестационарных средах // Морской гидрофизический журнал, 1990, № 5, С.13-18.
6. Булатов В.В. Установившееся движение стратифицированной жидкости над неровным дном // Журнал прикладной механики и технической физики. 1991, № 5, С.34-39.
7. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Ближнее поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником в потоке стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики. 1991, № 1, С.24-28.
8. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые источником в стратифицированных неоднородных по горизонтали средах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991, № 1, С.124-128.
9. Боровиков В.А., Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Исаев И.Л., Ломанов Ю.П., Фрост В.А. Обработка и анализ измерений внутренних волн в районе шельфа Западной Сахары // Океанология. 1993, Т.33, № 4, С.532-535.
10. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Данилов В.Г., Доброхотов С.Ю. О распространении точечной алгебраической особенности для двумерных нелинейных уравнений гидродинамики // Математические заметки, 1994, Т.55, вып.3, С.11-20.

11. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Данилов В.Г., Доброхотов С.Ю. Пример вычисления траектории "глаза" тайфуна на основе гипотезы В.П.Маслова // Доклады Академии наук. 1994, Т.338, №1, С.102-107.
12. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. О расчете поля внутренних гравитационных волн при произвольном нестационарном движении источника// Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1995, №3, С.174-177.
13. Borovikov V.A., Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves excited by a body moving in a stratified fluid // Fluid Dynamics Research, 1995. Vol.5, P.325-336.
14. Боровиков В.А., Булатов В.В., Морозов Е.Г., Тамайо Р.Г. Неспектральное и спектральное исследование распространения приливных внутренних волн в океане (на примере эксперимента «Мезополигон») // Океанология, 1998, Т.3, №38, С.343-348.
15. Булатов В.В. О прогнозировании фактического платежного баланса брокерской компании // Финансист, 1998, №4(183), С.72-74
16. Булатов В.В. Платежный баланс фондовых операций // Банковские технологии, 1998, №9(41), С.83-86
17. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Равномерная асимптотика дальнего поля внутренних гравитационных волн при движении источника в слое стратифицированной жидкости с плавноменяющимся дном // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1998, №3, С.111-120

18. Булатов В.В. Тенденции фондового рынка в условиях финансового кризиса // Банковские технологии, 1999, №1(44), С.53-55
19. Булатов В.В. Новые технологии фондовых операций в условиях финансового кризиса // Финансист, 1999, №2(193), С.61-64
20. Булатов В.В. Арбитражное и антикризисное управление на фондовом рынке // Финансист, 1999, №8(197), С.25-27
21. Булатов В.В. Особенности антикризисных технологий // Банковские технологии, 1999, №10(51), С.77-79
22. Булатов В.В. Московские городские облигации между прошлым и будущим // Финансист, 1999, №12(201), С.34-35
23. Булатов В.В., Ваньян П.Л., Владимиров Ю.В., Морозов Е.Г. Распространение внутренних приливных волн в северо-западной части Тихого океана // Известия Академии инженерных наук РФ. Прикладная математика и информатика, 2000, Т.1, С.112-117.
24. Булатов В.В. Налоговые технологии на финансовых рынках // Банковские технологии, 2000, №4(56), С.65-68
25. Булатов В.В. Брокер-депозитарий: риски или дополнительные возможности // Финансист, 2000, №8(209), С.30-31
26. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Об асимптотике критических режимов генерации внутренних гравитационных волн // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2000, №5, С.124-128.

27. Булатов В.В. Investment banking: некоторые российские реалии // Банковские технологии, 2001, №7-8(70), С.69-71.
28. Булатов В.В. Арбитражное управление и секьюритизация долговых обязательств акционерных обществ // Аналитический банковский журнал, 2002, №3(82), С.86-88.
29. Булатов В.В. Арбитражное управление и секьюритизация долговых обязательств // Вестник НАУФОР, 2002, №4, С.27-29.
30. Булатов В.В. Новые технологии коллективных инвестиций – закрытые паевые инвестиционные фонды // Банковские технологии, 2003, №11(95), С.43-46.
31. Булатов В.В. Закрытые паевые инвестиционные фонды недвижимости как перспективные инструменты привлечения // Пенсионные деньги, 2003, №5(5), С.61-65.
32. Булатов В.В. Закрытый паевой инвестиционный фонд и секьюритизация коллективных инвестиций в недвижимость: реальность и перспективы // Имущественные отношения в Российской Федерации, 2004, №10, С.40-51
33. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. О расчете собственных функций и дисперсионных кривых основной вертикальной спектральной задачи уравнения внутренних гравитационных волн // Математическое моделирование, 2007, Т.19, №2, С.59-68.

34. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. О моделировании полей внутренних гравитационных волн от нелокальных источников возмущений // Математическое моделирование, 2008, Т.20, №8, С.3-12.
35. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Модифицированная функция Грина для уравнения внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды с постоянным сдвиговым течением // Прикладная математика и механика, 2008, Т.72, №5, С.727-733.
36. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны при критических режимах генерации и в окрестности траекторий движений источников // Журнал прикладной механики и технической физики, 2008, Т.49, № 5. С.70-79.
37. Булатов В.В. Новая архитектура фондового рынка и проблемы привлечения инвестиций в современных условиях // Экономика в промышленности, 2009, №3. С.22-28.
38. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Оценка границ применимости линейной теории внутренних гравитационных волн // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2010, №5. С.123-129
39. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Моделирование волновой динамики неоднородных и нестационарных стратифицированных сред // Математическое моделирование, 2010, Т. 22, №12, С.3-12

40. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Non-local boundary conditions for mathematic modeling of stratified medium wave dynamics // *Advanced Applied Mathematical Sciences*, 2010. Vol.4. № 1. P.1-22
41. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Far fields of internal gravity waves in stratified media of variable depth // *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2010, Vol. 17. № 4. P.400-412.
42. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. The uniform asymptotic form of the internal gravity wave field generated by a source moving above a smoothly varying bottom // *Journal of Engineering Mathematic*, 2011, Vol. 69 (2). P. 243-260.
43. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от осциллирующих источников возмущений // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, 2011, Т. 47, №2, С.1-4
44. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика волнового поля в стратифицированной среде переменной глубины // *Доклады Академии наук*, 2012, Т. 444, №2, С.208-211
45. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Асимптотики высших приближений полей внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины // *Журнал прикладной механики и технической физики*, 2013, Том 54, №1, С.79-85.
46. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости переменной глубины // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, 2013, Т. 49, №3.

47. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, 2013, Т.6, №2, С.55-70
48. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Моделирование волновой динамики стратифицированных сред с учетом нелинейности, вязкости, вращения Земли и сжимаемости // *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/606.html>
49. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves dynamics in ocean with shear flows // *ADITI (Advanced and Development in Technology International) Journal of Mathematical Physics*. 2013, Vol.3(1), P.15-32.
50. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Fundamental problems of internal gravity waves dynamics in ocean // *Journal of Basic & Applied Sciences*. 2013, Vol.9, P.69-81.
51. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Wave dynamics of stratified mediums with variable depth: exact solutions and asymptotic representations // *IUTAM Procedia*. 2013, Vol.8, P.229-237.
52. Булатов В.В., Владимиров И.Ю., Владимиров Ю.В. Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2014, №5, С.111-118

53. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Asymptotical analysis of internal gravity wave dynamics in stratified medium // Applied Mathematical Sciences, 2014, Vol.8, №5, P.217-240
54. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Точные и асимптотические решения уравнения внутренних гравитационных волн в клиновидной области // Прикладная математика и механика, 2014, Т. 78, № 5, С.690-699.
55. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в нестационарном океане // Международный научно-исследовательский журнал, 2014, №11(30), часть 4, С.100-104
56. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние и поверхностные возмущения природных стратифицированных сред // Международный научно-исследовательский журнал, 2015, №2(33), часть 4, С.70-76
57. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика стратифицированных сред переменной глубины // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 58–76
58. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волн, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2015, №6, С. 26-34.
59. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн при произвольных скоростях движения источника возмущений // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2015, том 51, №6, С.684-689

60. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, 2015, том 8, №3, С.24-31
61. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2016, №5, С. 57-63.
62. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика импульсов в стратифицированных сжимаемых и несжимаемых средах // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2016, №3(45), часть 2, С.93-100
63. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Особенности волновой динамики стратифицированных сред с переменной частотой плавучести // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2016, №5(47), часть 6, С.71-75
64. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика экспоненциально стратифицированных сред // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2017, № 4-1 (58) С. 77-80
65. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика стратифицированных сред с течениями // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2017, № 6-2(60), С. 108-110



Владимиров Юрий Владимирович – родился 17 ноября 1952 года в городе Тула, окончил Московский институт электронного машиностроения по специальности «прикладная математика». С 1981 года работает в Институте проблем механики АН СССР, в настоящее время - Институт проблем механики РАН им.А.Ю.Ишлинского. Кандидат физико-математических наук. В 1990 году защитил кандидатскую диссертацию «Внутренние волны от движущегося в слое неоднородной жидкости источника» по специальности «механика жидкости, газа и плазмы». Автор более 100 научных работ, в том числе 5 монографий в области математического моделирования, гидрофизики, волновой динамики сложных сред, прикладной математики

## Основные научные труды

### Монографии

1. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. М.: Наука, 2005, 195 с.
2. V.V.Bulatov, Y.V.Vladimirov Internal gravity waves: theory and applications. Moscow: Nauka Publishers, 2007, 304 pp.
3. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010, 470 с.
4. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновые движения стратифицированных сред: теория и приложения Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2012, 577 с.
5. V.V.Bulatov, Yu.V.Vladimirov Wave dynamics of stratified mediums. Moscow: Nauka Publishers, 2012, 584 pp.
6. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015, 735 с.
7. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Теория волновых движений неоднородных сред. Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017, 580 с.

## Статьи

1. Боровиков В.А. Владимиров Ю.В. Сравнение двух методов оценки трансформации мод на неоднородном участке волновода // Акустический журнал, 1981, т.27, №1, С.56-69.
2. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М.Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1984, т. 20, № 6, С. 526-532.
3. Владимиров Ю.В. Поле внутренних волн в окрестности фронта, возбужденное источником, движущимся над плавно меняющимся дном // Журнал прикладной механики и технической физики, 1989, № 4, С. 89-94.
4. Боровиков В.А., Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Левченко Е.С. О расчете поля внутренних гравитационных волн, генерируемых неподвижным источником в потоке стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики. 1989, № 4, С.58-61.
5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в неоднородной по горизонтали среде // Морской гидрофизический журнал. 1989, № 6, С.14-19.

6. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в нестационарных средах // Морской гидрофизический журнал, 1990, № 5, С.13-18.
7. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Ближнее поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником в потоке стратифицированной жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики. 1991, № 1, С.24-28.
8. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые источником в стратифицированных неоднородных по горизонтали средах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991, № 1, С.124-128.
9. Боровиков В.А., Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Исаев И.Л., Ломанов Ю.П., Фрост В.А. Обработка и анализ измерений внутренних волн в районе шельфа Западной Сахары // Океанология. 1993, Т.33, № 4, С.532-535.
10. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Данилов В.Г., Доброхотов С.Ю. О распространении точечной алгебраической особенности для двумерных нелинейных уравнений гидродинамики // Математические заметки, 1994, Т.55, вып.3, С.11-20.
11. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Данилов В.Г., Доброхотов С.Ю. Пример вычисления траектории "глаза" тайфуна на основе гипотезы В.П.Маслова // Доклады Академии наук. 1994, Т.338, №1, С.102-107.

12. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. О расчете поля внутренних гравитационных волн при произвольном нестационарном движении источника // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1995, №3, С.174-177.
13. Borovikov V.A., Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves excited by a body moving in a stratified fluid // Fluid Dynamics Research, 1995. Vol.5, P.325-336.
14. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Равномерная асимптотика дальнего поля внутренних гравитационных волн при движении источника в слое стратифицированной жидкости с плавноменяющимся дном // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1998, №3, С.111-120
15. Булатов В.В., Ваньян П.Л., Владимиров Ю.В., Морозов Е.Г. Распространение внутренних приливных волн в северо-западной части Тихого океана // Известия Академии инженерных наук РФ. Прикладная математика и информатика, 2000, Т.1, С.112-117.
16. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Об асимптотике критических режимов генерации внутренних гравитационных волн // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2000, №5, С.124-128.
17. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. О расчете собственных функций и дисперсионных кривых основной вертикальной спектральной задачи уравнения внутренних гравитационных волн // Математическое моделирование, 2007, Т.19, №2, С.59-68.

18. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. О моделировании полей внутренних гравитационных волн от нелокальных источников возмущений // Математическое моделирование, 2008, Т.20, №8, С.3-12.
19. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Модифицированная функция Грина для уравнения внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды с постоянным сдвиговым течением // Прикладная математика и механика, 2008, Т.72, №5, С.727-733.
20. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны при критических режимах генерации и в окрестности траекторий движений источников // Журнал прикладной механики и технической физики, 2008, Т.49, № 5. С.70-79.
21. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Оценка границ применимости линейной теории внутренних гравитационных волн // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2010, №5. С.123-129
22. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Моделирование волновой динамики неоднородных и нестационарных стратифицированных сред // Математическое моделирование, 2010, Т. 22, №12, С.3-12
23. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Non-local boundary conditions for mathematic modeling of stratified medium wave dynamics // Advanced Applied Mathematical Sciences, 2010. Vol.4. № 1. P.1-22
24. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Far fields of internal gravity waves in stratified media of variable depth // Russian Journal of Mathematical

Physics, 2010, Vol. 17. № 4. P.400-412.

25. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. The uniform asymptotic form of the internal gravity wave field generated by a source moving above a smoothly varying bottom // Journal of Engineering Mathematic, 2011, Vol. 69 (2). P. 243-260.
26. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от осциллирующих источников возмущений // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2011, Т. 47, №2, С.1-4
27. Владимиров Ю.В. Точное решение для стоячих монохроматических внутренних волн в клине // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2012, №5, С.73-79
28. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика волнового поля в стратифицированной среде переменной глубины // Доклады Академии наук, 2012, Т. 444, №2, С.208-211
29. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Асимптотики высших приближений полей внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины // Журнал прикладной механики и технической физики, 2013, Том 54, №1, С.79-85.
30. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости переменной глубины // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2013, Т. 49, №3. С.358-363

31. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, 2013, Т.6, №2, С.55-70
32. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Моделирование волновой динамики стратифицированных сред с учетом нелинейности, вязкости, вращения Земли и сжимаемости // *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/606.html>
33. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves dynamics in ocean with shear flows // *ADITI (Advanced and Development in Technology International) Journal of Mathematical Physics*. 2013, Vol.3(1), P.15-32.
34. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Fundamental problems of internal gravity waves dynamics in ocean // *Journal of Basic & Applied Sciences*. 2013, Vol.9, P.69-81.
35. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Wave dynamics of stratified mediums with variable depth: exact solutions and asymptotic representations // *IUTAM Procedia*. 2013, Vol.8, P.229-237.
36. Булатов В.В., Владимиров И.Ю., Владимиров Ю.В. Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2014, №5, С.111-118

37. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Asymptotical analysis of internal gravity wave dynamics in stratified medium // Applied Mathematical Sciences, 2014, Vol.8, №5, P.217-240
38. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Точные и асимптотические решения уравнения внутренних гравитационных волн в клиновидной области // Прикладная математика и механика, 2014, Т. 78, № 5, С.690-699.
39. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в нестационарном океане // Международный научно-исследовательский журнал, 2014, №11(30), часть 4, С.100-104
40. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние и поверхностные возмущения природных стратифицированных сред // Международный научно-исследовательский журнал, 2015, №2(33), часть 4, С.70-76
41. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика стратифицированных сред переменной глубины // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 58–76
42. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волн, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2015, №6, С. 26-34.
43. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн при произвольных скоростях движения источника возмущений // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2015, том 51, №6, С.684-689

44. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, 2015, том 8, №3, С.24-31
45. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2016, №5, С. 57-63.
46. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика импульсов в стратифицированных сжимаемых и несжимаемых средах // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2016, №3(45), часть 2, С.93-100
47. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Особенности волновой динамики стратифицированных сред с переменной частотой плавучести // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2016, №5(47), часть 6, С.71-75
48. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика экспоненциально стратифицированных сред // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2017, № 4-1 (58) С. 77-80
49. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика стратифицированных сред с течениями // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2017, № 6-2(60), С. 108-110

Научное издание

Булатов Виталий Васильевич  
Владимиров Юрий Владимирович

# НОВЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Монография

Верстка: Анна Васильева  
Дизайн: Мелисса Ченинг

Подписано к исп. 27.09.2017 г.  
1 электрон. опт. диск (CD-ROM)  
Электрон. текст. дан. (1 файл 6.1 Мб).  
Тираж 500 экз.  
Заказ 055-К  
Киров, МЦНИП  
<http://mcnip.ru>  
e-mail: [izdatel@mcnip.ru](mailto:izdatel@mcnip.ru)