

УДК 532.59:534.1

**ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ
ПУЛЬСИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ ВОЗМУЩЕНИЙ**

© 2015 г. В. В. БУЛАТОВ, Ю. В. ВЛАДИМИРОВ

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
e-mail: internalwave@mail.ru; vladimyura@yandex.ru*

Поступила в редакцию 03.06.2015 г.

Рассмотрена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей внутренних гравитационных волн от пульсирующего локализованного источника возмущений в потоке стратифицированной среды конечной глубины. Полученные решения описывают волновые возмущения как внутри, так и вне волновых фронтов и выражаются через функцию Эйри и ее производные. Приведены результаты численных расчетов волновых картин возбуждаемых волновых полей.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, дальние поля, равномерная асимптотика, волновой фронт.

Одним из основных механизмов возбуждения внутренних гравитационных волн в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера) является их генерация нестационарными источниками возмущений различной физической природы как природного (движущийся тайфун, обтекание неровностей рельефа океана, подветренные горы), так и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров [1–5]. В линейном приближении дальние волновые поля можно исследовать, например, с помощью различных асимптотик [3–9]. Построенные аналитические конструкции позволяют в дальнейшем, в том числе с использованием средств компьютерной математики, получать асимптотические представления волновых полей с учетом реальной неоднородности и нестационарности параметров природных стратифицированных сред [3–5].

Цель работы – построение асимптотических решений, описывающих дальние поля внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованным пульсирующим источником возмущений в потоке стратифицированной среды конечной толщины.

1. Постановка задачи и интегральные формы решений. Рассматривается задача о дальних полях внутренних гравитационных волн, возникающих при обтекании точечного источника возмущений мощности Q потоком стратифицированной среды толщины H . Предполагается, что мощность источника гармонически зависит от времени $Q = q \exp(i\omega t)$. Источник движется со скоростью V в горизонтальном направлении вдоль оси x ; ось z направлена вверх; глубина залегания источника $-z_0$; рассматривается установившийся режим волновых колебаний.

В линейной постановке и с учетом приближения Буссинеска имеем следующее уравнение, например, для вертикального смещения изопикн $\eta(x, y, z)$, как линий равной плотности с той же временной гармонической зависимостью [3–5]

$$\left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (\Delta\eta) + N^2(z)(\Delta_2\eta) = Q\left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x)\delta(y)\delta'(z - z_0) \quad (1.1)$$

$$\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

где $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$ – частота Брента–Вайсяля, которая далее предполагается постоянной ($\rho_0(z)$ – невозмущенная плотность), $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Функция $\eta(x, y, z)$ связана с вертикальной компонентой скорости $w(x, y, z)$ соотношением: $w(x, y, z) = \left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right)\eta(x, y, z)$ [3–5].

В качестве граничных условий используется условие “твердой крышки”

$$\eta = 0 \text{ при } z = 0, -H \quad (1.2)$$

В безразмерных координатах $x^* = x\pi/H$, $y^* = y\pi/H$, $z^* = z\pi/H$, $\eta^* = \eta H^2 V / q\pi^2$, $\omega^* = \omega/N$, $t^* = tN$, уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) переписутся следующим образом (индекс “*” далее опускается):

$$\left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (\Delta\eta) + (\Delta_2\eta) = \left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x)\delta(y)\delta'(z - z_0) \quad (1.3)$$

$$\eta = 0 \text{ при } z = 0, -\pi$$

где $c = NH/\pi$ – максимальное значение групповой скорости внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды толщины H [3–5], $M = V/c$. Далее рассматривается случай $M > 1$.

Решение задачи (1.3) ищется в форме интеграла Фурье:

$$\eta(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \varphi(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu \quad (1.4)$$

Тогда для определения функции $\varphi(\mu, \nu, z)$ имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \left(\frac{1}{(\omega - \mu M)^2} - 1 \right) \varphi = \frac{i}{(\omega - \mu M)} \frac{\partial \delta(z - z_0)}{\partial z_0}, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2 \quad (1.5)$$

$$\varphi = 0 \text{ при } z = 0, -\pi$$

Решение задачи (1.5) можно представить в виде суммы вертикальных (нормальных)

мод $\varphi(\mu, \nu, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mu, \nu, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\mu, \nu) \cos n z_0 \sin n z$, т.е. в виде ряда по собственным функциям однородной краевой задачи (1.5), где

$$B_n(\mu, \nu) = \frac{2ni}{\pi(\omega - \mu M)} \frac{1}{k^2 \Omega - n^2}, \quad \Omega = \frac{1}{(\omega - \mu M)^2} - 1 \quad (1.6)$$

В результате решение задачи (1.4) представляется в виде

$$\eta(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x, y) \cos n z_0 \sin n z$$

$$\eta_n(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\mu, \nu) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu$$

Приравнявая к нулю знаменатель $k^2\Omega - n^2$ из (1.6), получим дисперсионное соотношение, связывающее горизонтальную μ и вертикальную ν компоненты волнового вектора \mathbf{k}

$$k^2 \left(\frac{1}{(\omega - \mu M)^2} - 1 \right) = n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Далее рассмотрим случай $\omega < 1$ и, для определенности, первую волновую моду ($n = 1$). Дисперсионное уравнение (1.7) имеет два действительных $\mu_1(\nu)$, $\mu_2(\nu)$ и два комплексно-сопряженных решения $\lambda_1(\nu)$, $\lambda_2(\nu)$. Проблема обхода полюсов $\mu_1(\nu)$, $\mu_2(\nu)$ на действительной оси переменной интегрирования μ решается с помощью метода возмущений. Заменяя в (1.7) ω на $\omega - i\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), можно показать, что возмущенные решения $\mu_1(\nu)$, $\mu_2(\nu)$ имеют отрицательную мнимую часть для всех ν . Таким образом, контур интегрирования в (1.6) по переменной μ проходит выше действительной оси.

Исследуем дальние поля внутренних гравитационных волн, поэтому при замыкании контура интегрирования по переменной μ учитываются только полюса на действительной оси, вклад от полюсов $\lambda_1(\nu)$, $\lambda_2(\nu)$ в общее волновое поле экспоненциально мал при больших $|x|$. Таким образом, имеем следующее выражение для функции $\eta(x, y, t)$ при $|x| \gg 1$:

$$\eta(x, y, t) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_i(\nu) \cos(\mu_i(\nu)x - \nu y - \omega t) d\nu = J_1 + J_2 \quad (1.8)$$

$$A_i(\nu) = \frac{M}{2} \frac{(\mu_i M - \omega)^2}{\mu_i \omega + M\nu^2 + \mu_i(\mu_i M - \omega)^3}$$

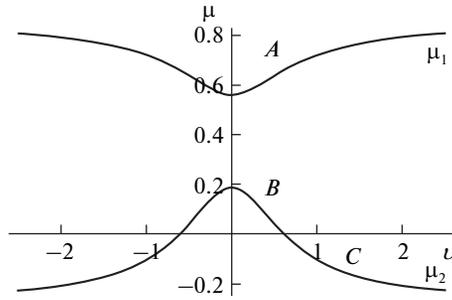
2. Построение неравномерных асимптотик решений. Рассмотрим поведение интегралов J_1 , J_2 из (1.8), соответствующих дисперсионным кривым $\mu_1(\nu)$, $\mu_2(\nu)$ при больших положительных значениях x . Дисперсионное соотношение (1.7) является алгебраическим уравнением четвертого порядка общего вида. Явные формулы типа формул Феррари чрезвычайно громоздки, тем не менее вычислительные системы типа “Математика” используют именно явные формулы, что позволяет оперировать не только с решениями $\mu_1(\nu)$, $\mu_2(\nu)$, но и с их производными первого и второго порядка. На фиг. 1 показаны дисперсионные кривые $\mu_1(\nu)$, $\mu_2(\nu)$ для случая $M = 1.8$, $\omega = 0.52$; все дальнейшие расчеты проведены также для этих значений параметров.

Рассмотрим сначала интеграл J_1 . Введем обозначения: $\Phi_1 = \mu_1(\nu)x - \nu y - \omega t$. Тогда, используя условие стационарности фазы в виде

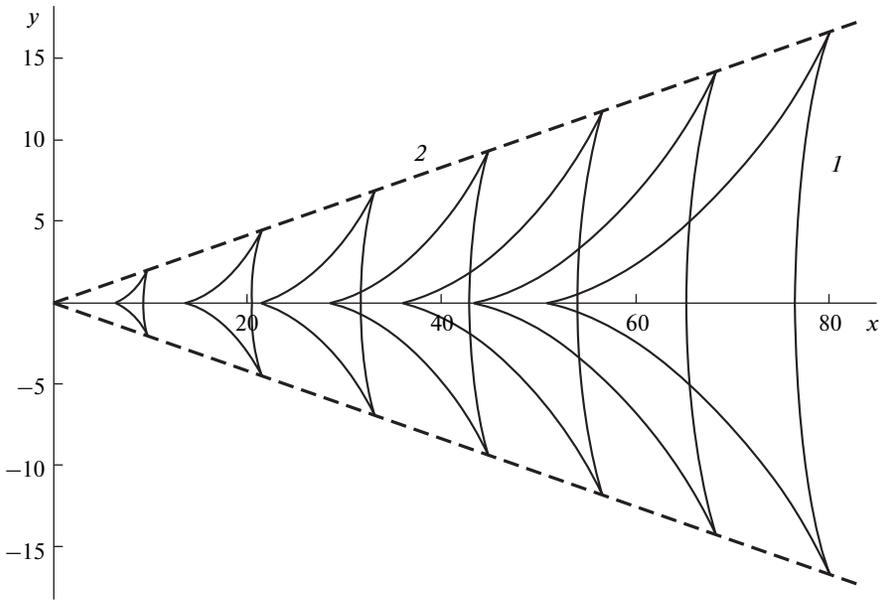
$$\mu'_{11}(\nu) = y/x \quad (2.1)$$

получим семейство линий постоянной фазы при различных значениях Φ_1 с параметром ν :

$$x = \frac{\Phi_1 + \omega t}{\mu_1(\nu) - \nu \mu'_1(\nu)}, \quad y = \frac{\mu'_{11}(\nu)(\Phi_1 + \omega t)}{\mu_1(\nu) - \nu \mu'_1(\nu)}$$



Фиг. 1. Дисперсионные кривые $\mu_1(\nu)$ (1), $\mu_2(\nu)$ (2): A и B – точки перегиба; C – корень уравнения $\mu'_2(\nu) = -\mu/\nu$



Фиг. 2. Линии равной фазы для J_1 : 1 – линии равной фазы; 2 – волновой фронт

На фиг. 2 изображены линии равной фазы 1 при $t = 10$, $\Phi_1 = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots, 6$. Правой ветви дисперсионной кривой $\mu_1(\nu)$ ($\nu > 0$) соответствует верхняя часть фигуры ($y > 0$). В силу симметрии будем рассматривать только верхнюю область. Части дисперсионной кривой от нуля до точки A на фиг. 1 соответствуют поперечные волны, от точки A до бесконечности – продольные волны, точка A – точка перегиба, ей соответствует линия 2 на фиг. 2, т.е. волновой фронт, внутри которого распространяется бегущая волна, описываемая интегралом J_1 . Линии равной фазы распространяются от начала координат до бесконечности и имеют вдоль луча фазовую скорость

$$C_f = \frac{\omega \sqrt{1 + (\mu'_1(\nu))^2}}{\mu_1(\nu) - \nu \mu'_1(\nu)}$$

Уравнение для продольных волн в окрестности оси x можно получить в явном виде, используя асимптотическое поведение дисперсионной кривой при больших значениях v

$$\mu_1(v) = \frac{1 + \omega}{M} - \frac{1}{2M} v^{-2} + \dots$$

Это уравнение имеет вид

$$y = \pm \frac{2\sqrt{2}(1 + \omega)^2}{3\sqrt{3}(2\pi k + \omega t)M^{3/2}} \left(x - \frac{(2\pi k + \omega t)M}{1 + \omega} \right)^{3/2}$$

Приведем еще две важные характеристики волновых полей, определяемые поведением интеграла J_1 . Первая – это длина волны, например, длина поперечной волны вдоль оси x : $\lambda = 2\pi/\mu_1'(0) = 11.2$. Вторая – угол полураствора волнового клина $\Theta = \arctg\left(\mu_1'(v_*)\right) = 11.8^\circ$, где v_* – корень уравнения $\mu_1''(v) = 0$, а сам волновой фронт имеет вид $y = Rx$, $R = \mu_1'(v_*)$.

В приближении стационарной фазы интеграл J_1 имеет вид [5, 10, 11]

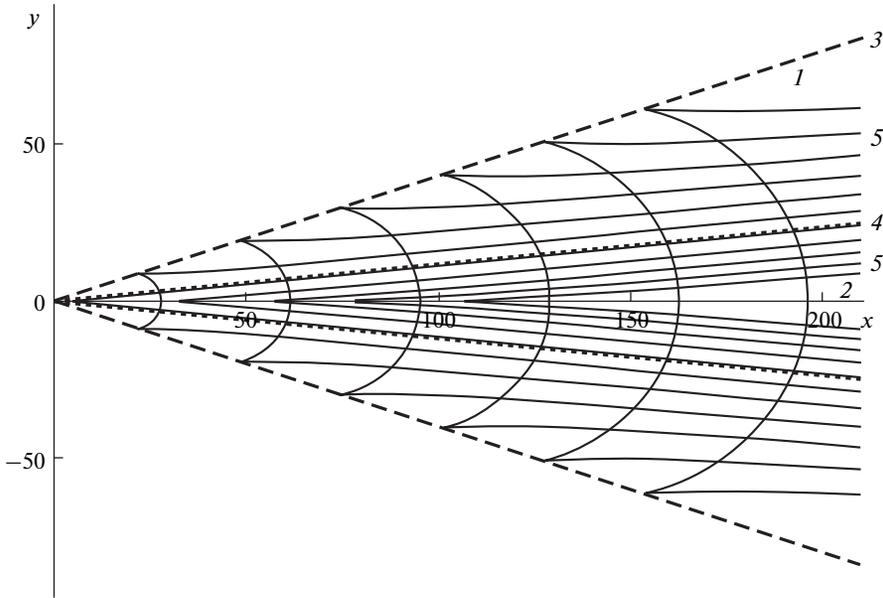
$$\begin{aligned} J_1 = & \frac{A_1(v_1)}{\sqrt{2\pi\mu_1''(v_1)x}} \cos(\mu_1(v_1)x - v_1y - \omega t + \pi/4) + \\ & + \frac{A_1(v_2)}{\sqrt{-2\pi\mu_1''(v_2)x}} \cos(\mu_1(v_2)x - v_2y - \omega t - \pi/4) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где v_1, v_2 – два корня уравнения (2.1), при этом v_1 лежит левее точки A на дисперсионной кривой, а v_2 – правее. Первое слагаемое в (2.2) описывает поперечные волны, второе – продольные.

Рассмотрим далее интеграл J_2 . Представим фазу Φ_2 в виде $\Phi_2 = -\mu_2(v)x - vy + \omega t$, при этом интеграл J_2 остается неизменным, а стационарные точки при $y > 0$ будут положительными. Тогда семейство линий постоянной фазы, при различных значениях Φ_2 , с параметром v

$$x = \frac{\Phi_2 - \omega t}{-\mu_2(v) + v\mu_2'(v)}, \quad y = \frac{\mu_2'(v)(\Phi_2 - \omega t)}{\mu_2(v) - v\mu_2'(v)}$$

описывается уже более сложной картиной, представленной на фиг. 3. Уравнение луча имеет вид $\mu_2'(v) = -y/x$. Точка перегиба B на фиг. 1 соответствует фронту волны (линия 3 на фиг. 3), точка C – корень уравнения $\mu_2'(v) = -\mu/v$ соответствует линии 4 на фиг. 3. Части дисперсионной кривой от нуля до точки B соответствуют поперечные гребни волн, от точки B до точки C – продольные гребни, расположенные между линией 3 и линией 4 на фиг. 3 (область 1), правее точки C – продольные гребни, расположенные между линией 4 и осью x (область 2). Фазы гребней, соответствующие расположению параметра v на дисперсионной кривой от нуля до точки C , имеют значения $2\pi n$ ($n = 0, -1, -2, -3, -4, -5$), правее точки C имеют значения $2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) ($t = 10$). В области 1 линии равной фазы распространяются от начала координат до бесконечности, а в области 2 – из бесконечности к началу координат. При этом вектор групповой скорости в обоих случаях направлен от начала координат в сторону бесконечности, так как энергия распространяется именно в этом направлении. Длина попереч-



Фиг. 3. Линии равной фазы для J_2 : 3 – волновой фронт; 5 – линии равной фазы; линия 4 разделяет две области 1 и 2 (линии равной фазы)

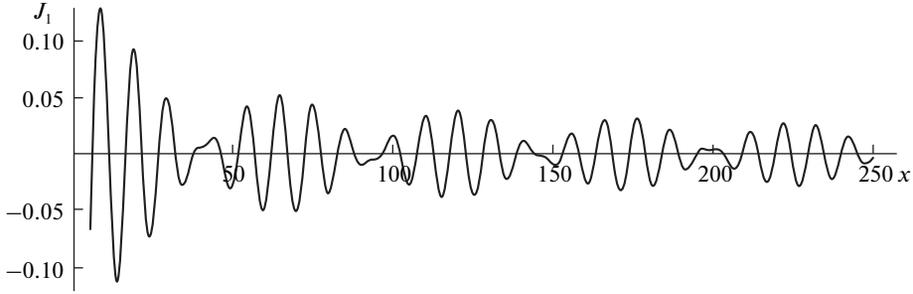
ной волны вдоль оси x равна $\lambda = -2\pi/\mu_2(0) = 33.6$, а угол полураствора волнового клина: $\Theta = \arctg(\mu_2'(v_*)) = 21.7^\circ$, где v_* – корень уравнения $\mu_2''(v) = 0$. В приближении стационарной фазы интеграл J_2 выглядит аналогично (2.2).

3. Построение равномерных асимптотик решений. Рассмотрим равномерную асимптотику интеграла J_1 (асимптотика J_2 строится аналогично). Приближение стационарной фазы (2.2) не работает в окрестности волнового фронта, где $\mu_1(v)'' \rightarrow 0$, а стационарные точки сливаются. Представим поэтому фазу интеграла J_1 в виде $\Phi_1 = xS(v, r) - \omega t$, $S(v, r) = \mu_1(v) - rv$, $r = y/x$. Для сведения интеграла к эталонному или каноническому сделаем замену переменных [5, 10, 11]

$$S(v, r) = a + \sigma s - s^3/3 \tag{3.1}$$

где параметры a и σ однозначно определяются из требования совпадения стационарных точек в (3.1), т.е. корней $v_1 = v_1(r)$, $v_2 = v_2(r)$ уравнения $S_v'(v, r) = 0$ и $s_{1,2} = \pm\sqrt{\sigma}$: $a(r) = (S(v_1, r) + S(v_2, r))/2$, $\sigma(r) = (3/4(S(v_1, r) - S(v_2, r)))^{2/3}$. Тогда равномерная асимптотика интеграла J_1 имеет вид [10, 11]

$$J_1 = \frac{T_+(r)}{x^{1/3}} Ai(x^{2/3}\sigma(r)) \cos(a(r)x - \omega t) + \frac{T_-(r)}{x^{2/3}\sqrt{\sigma(r)}} Ai'(x^{2/3}\sigma(r)) \sin(a(r)x - \omega t) \tag{3.2}$$

Фиг. 4. Интеграл J_1 вдоль луча

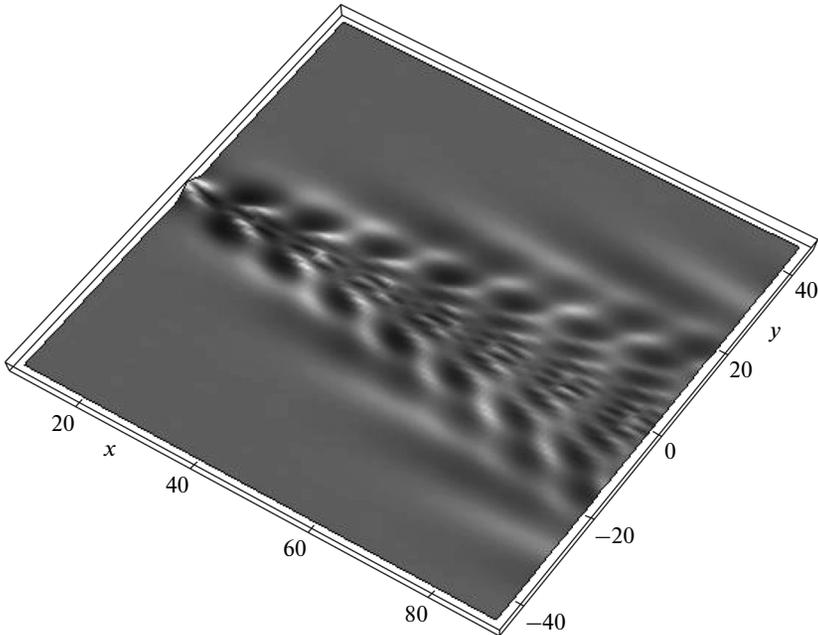
$$T_{\pm} = \frac{1}{2} \left[A_1(v_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(r)}}{S''_{vv}(v_2, r)}} \pm A_1(v_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(r)}}{S''_{vv}(v_1, r)}} \right]$$

где первое слагаемое в (3.2) выражается через функцию Эйри, $Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(xt - \frac{t^3}{3}\right) dt$, а второе – через производную функцию Эйри.

Асимптотика (3.2) применима и в окрестности волнового фронта, вдали от фронта переходит в неравномерное приближение (2.2), в чем можно убедиться, заменив функцию Эйри и ее производную на их асимптотики при больших положительных значениях аргумента:

$$Ai(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi x^{1/4}}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad Ai'(x) \sim \frac{x^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Вне волнового клина равномерная асимптотика (3.2) экспоненциально мала, так как действительных стационарных точек нет, а есть пара комплексно-сопряженных точек. В окрестности волнового фронта поле имеет порядок $O(x^{-1/3})$, при этом доминирующим является первое слагаемое из (3.2). Вдали от фронта асимптотика (3.2) переходит в приближение стационарной фазы (2.2), и оба слагаемых – порядка $O(x^{-1/2})$. Каждый из двух членов, образующих это приближение, представляет собой быстро осциллирующую по пространству функцию с плавно убывающей амплитудой, при этом частоты осцилляций разные и определяются стационарными точками $v_1(r)$, $v_2(r)$. В равномерном приближении каждое слагаемое также представляет собой быстро осциллирующую функцию с медленно меняющейся амплитудой, в роли которой выступают функция Эйри и ее производная. При этом частоты осцилляций одинаковы и равны полусумме эйконолов в точках $v_1(r)$, $v_2(r)$, частоты огибающих также одинаковы и равны разности эйконолов в этих же точках. Отсюда следует, что равномерная асимптотика вдоль луча дает волновую картину биений. На фиг. 4 изображена картина волновых биений, рассчитанная по формуле (3.2) для интеграла J_1 при $r = 0.06$, при этом частота осцилляций примерно на порядок больше частоты огибающей. На фиг. 5 изображена трехмерная волновая картина возвышения $\eta(x, y) = J_1 + J_2$ внутренних гравитационных волн от пульсирующего источника возмущений, на которой, в частности, видны волновые фронты, соответствующие J_1 и J_2 .



Фиг. 5. Возвышение внутренних гравитационных волн от движущегося пульсирующего источника возмущений

Заключение. Полученные равномерные асимптотические решения задачи позволили описать дальние поля внутренних гравитационных волн от локализованного пульсирующего источника возмущений в потоке стратифицированной среды конечной толщины как вне, так и внутри соответствующих волновых фронтов. Показано, что асимптотики дальних полей позволяют эффективно рассчитать основные характеристики волновых полей и провести качественный анализ полученным решениям. Тем самым открываются широкие возможности при изучении волновых картин в целом, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики, в том числе для проведения экспресс-оценок при натурных измерениях волновых полей. Отметим, что подобного рода волновые картины могут наблюдаться при дистанционном зондировании и наблюдении внутренних гравитационных волн, возбуждаемых различными источниками возмущений, как в океане, так и в атмосфере Земли [1, 5, 9].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00466).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
2. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. 394 p.
3. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
4. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Wave dynamics of stratified mediums. М.: Наука, 2012. 584 с.
5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.

6. *Зайцев А.А.* Волны на поверхности потока конечной глубины, возбуждаемые подводным источником // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201. № 5. С. 1070–1073.
7. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mech. 2013. V. 720. P. 104–139.
8. *Rees T., Lamb K.G., Poulin F.J.* Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // SIAM J. Appl. Math. 2012. V. 72(4). P. 1041–1060.
9. *Свиркунов П.Н., Калашиник М.В.* Фазовые картины волн от локализованных источников, движущихся относительно стратифицированной вращающейся среды (перемещающийся ураган, орографическое препятствие) // Докл. РАН. Механика. 2012. Т. 447. № 4. С. 396–400.
10. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю., Владимиров Ю.В.* Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 5. С. 104–111.
11. *Borovikov V.A.* Uniform stationary phase method. London: IEE electromagnetic waves. Ser. 40, 1994. 233 p.