

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЧАСТОТЫ ПЛАВУЧЕСТИ

В.В. Булатов, Ю.В. Владимиров

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, internalwave@mail.ru,
vladimyura@yandex.ru*

Рассматривается задача о построении аналитических решений уравнения внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде с переменной частотой Брента-Вяйсяля. Предложены четыре модельных распределений частоты плавучести, описывающих наличие слоя скачка плотности воды в океане. Для каждой модели получены аналитические решения, описывающие дисперсионные кривые и собственные функции основной вертикальной спектральной задачи. Приведены результаты численных расчетов для параметров, характерных для реального океана.

Ключевые слова: *внутренние гравитационные волны, переменная частота плавучести, собственные функции, дисперсионные кривые.*

ANALYTICAL SOLUTIONS OF INTERNAL GRAVITY WAVES EQUATION FOR MODEL BUOYANCY FREQUENCY DISTRIBUTION

V.V. Bulatov, Yu.V. Vladimirov

A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS

The problem of constructing analytical solutions of the equation of internal gravity waves in a stratified medium with variable frequency Brunt-Vaisala is considered. Four model buoyancy frequency distributions are proposed that describe the existence of a layer of water density jump in the ocean. For each model, analytical solutions describing the dispersion curves and eigenfunctions of the main vertical spectral problem are obtained. The results of numerical calculations for the parameters characteristic for the real ocean are presented.

Keywords: *internal gravity waves, variable buoyancy frequency, eigenfunctions, dispersion curves.*

Важным механизмом возбуждения полей внутренних гравитационных волн (ВГВ) в океане является их генерация источниками возмущений различной физической природы: природного (движущийся тайфун, ветровое волнение, обтекание неровностей рельефа океана, изменения полей плотности и течений, подветренные горы) и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров. Система уравнений гидродинамики, описывающая волновые возмущения стратифицированных сред в общем виде представляет достаточно сложную математическую задачу как в плане доказательств теорем существования и единственности решений в соответствующих функциональных классах, так и с вычислительной точки зрения. Основные результаты решений задач о генерации волновых возмущений представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки численных и асимптотических методов их исследования, допускающих качественный анализ и проведение экспресс оценок получаемых решений. В рамках линейной теории для аналитического исследования волновых возмущений в природных стратифицированных средах используются асимптотические методы интегральных представлений и приближенные методы [1–7].

Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой волновых возмущений неоднородного и нестационарного океана, необходимо исходить из развитых математических моделей. Трехмерность структуры

природных стратифицированных сред также играет существенную роль, и в настоящее время не имеется возможность проведения масштабных вычислительных экспериментов по моделированию трехмерных океанических течений на больших временах с достаточной точностью. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге волновых явлений можно получить на основе более простых аналитических моделей. Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных гидрофизических полей в океане. Ряд результатов решений модельных линейных задач, описывающих различные режимы возбуждения и распространения ВГВ, лежат в основе активно развивающейся в настоящее время нелинейной теории генерации волн экстремально большой амплитуды – волн-убийц [6].

Моделирование динамики ВГВ актуально вследствие возросшего количества морских платформ, установленных на шельфовых месторождениях нефти и газа. Можно отметить некоторые случаи повреждения морских платформ ВГВ большой амплитуды, например, в Андаманском море, когда одна из опор платформы в октябре 1997 г. была изогнута сдвиговым течением во внутренней волне. Измерения показывают, что нагрузки от ВГВ, действующие на подводные части морских платформ в вертикальном направлении могут в 30 раз превосходить нагрузки от ветровых волн. Действие ВГВ приводит к мощному транспорту наносов и размывам дна, особенно в глубоководных районах, где влияние ветровых, в том числе штормовых волн, пренебрежимо мало. Внутренние гравитационные волны способствуют также диффузии осадков и транспорту наносов в морской среде, поэтому процессы переноса частиц посредством индуцированных ВГВ потоков активно исследуются в рамках различных прикладных направлений, связанных с гидробиологией (миграция планктона, бентоса), экологией (распространение примесей и загрязнений) и инженерной океанологией [3–5].

Внутренние гравитационные волны, существующие в океане вследствие стратификации его вод, являются двумерными, а во многих случаях и трехмерными, поэтому в вычислительном плане анализ двумерных и трехмерных нестационарных волновых движений является весьма сложной задачей. Разработан и получил широкое применение численный код MIT, решающий полные уравнения гидродинамики с учетом реального рельефа дна, вращения Земли и турбулентных процессов, который разработан в Массачусетском технологическом институте (США). Эта численная модель требует больших компьютерных ресурсов, оправданных только для решения ряда отдельных практических задач океанологии. Существующие в настоящее время другие методы численного моделирования, в том числе с использованием суперкомпьютеров (алгоритм IGW Research, алгоритмы Riemann Solver для решения гиперболических уравнений мелкой воды, псевдо-спектральный алгоритм высокого порядка для решений уравнений гидродинамики NOSM) не всегда позволяют эффективно рассчитывать конкретные физические задачи волновой динамики океана и атмосферы с учетом их реальной изменчивости, так как ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют большой вычислительной мощности, не всегда учитывают физическую специфику решаемых задач, что существенно ограничивает их практическую применимость, особенно при расчетах ВГВ в реальных природных средах. Кроме того, использование мощных численных алгоритмов требует верификации и сравнения с решениями модельных задач [6, 7].

Поэтому в современных научных исследованиях и анализе волновых явлений в реальном стратифицированном океане широко применяются упрощенные аналитические модели. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых

полей интегралами Фурье и анализе получаемых спектральных задач [5, 8]. Целью настоящей работы является построение аналитических решений уравнения ВГВ для модельных распределений частоты плавучести.

Рассматривается задача о свободных полях ВГВ с гармонической зависимостью от времени в виде $\exp(i\omega t)$. В приближении Буссинеска имеем следующее уравнение, например, для вертикального смещения изопикн $\eta(x, y, z)$ (линий равной плотности) [2–5, 8]

$$\omega^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta + N^2(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta = 0$$

где $N^2(z) = -g / \rho_0(z) d\rho_0(z) / dz$ – квадрат частоты Брента-Вяйсяля (частоты плавучести), $\rho_0(z)$ – невозмущенная плотность стратифицированной среды по глубине, g – ускорение свободного падения. Решение ищется в виде интегралов Фурье

$$\eta(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu$$

Тогда для определения функции $\varphi(\mu, \nu, z)$ необходимо решить основную вертикальную краевую задачу внутренних волн [2–5, 8]

$$\frac{\partial^2 \varphi(k, z)}{\partial z^2} + k^2 (N^2(z)\omega^{-2} - 1) \varphi(k, z) = 0, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2$$

Далее для аналитического решения этой спектральной задачи будут использоваться различные модельные распределения частоты плавучести, применяемые в океанологических расчетах для изучения динамики ВГВ при наличии постоянного термоклина (слоя скачка плотности). Замечательной особенностью Мирового океана является наличие постоянного слоя скачка плотности – области быстрого изменения температуры. Зависимость частоты Брента-Вяйсяля от глубины в модельных представлениях может отличаться от эмпирических зависимостей, которые, однако, характеризуются наличием максимума $N^2(z)$ в слое скачка плотности морской среды. Модельные распределения частоты плавучести позволяют решить задачу аналитически, в то время как использование эмпирических зависимостей требует применения только численных методов. Однако, как показывают многочисленные исследования, основные качественные результаты по описанию динамики ВГВ зависят, как правило, не от конкретной аналитической формы аппроксимации частоты плавучести, а от существования максимума $N^2(z)$ в слое скачка плотности океанической воды [4, 5, 9–11].

Первая модель – безграничная среда с квадратичным распределением частоты плавучести: $N^2(z) = N_0^2 - 4\chi^2 z^2$ ($-\infty < z < \infty$). В безразмерных координатах и переменных $x^* = x/L$, $y^* = y/L$, $z^* = z/L$, $k^* = kL$, $\omega^* = \omega/N_0$, $L = N_0/2\chi$ основная спектральная задача имеет вид (звездочка далее опускается)

$$\frac{\partial^2 \varphi(z, k)}{\partial z^2} + k^2 \left((1 - z^2)\omega^{-2} - 1 \right) \varphi(z, k) = 0, \quad \varphi \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty \quad (1)$$

Линейно независимые решения этого уравнения являются функции $D_\lambda(\pm z\sqrt{2k/\omega})$, где $\lambda = (k - \omega - k\omega^2) / 2\omega$, $D_\lambda(\tau)$ – функция параболического цилиндра [12]. Данные решения удовлетворяют граничным условиям при $\lambda = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Эти условия определяют дисперсионные соотношения: $\omega_n^1(k) = \left(-2n - 1 + \sqrt{(2n+1)^2 + 4k^2} \right) / 2k$ и собственные функции: $\varphi_n(z, k) = D_n(z\sqrt{2k/\omega})D_n(-\tau) = (-1)^n D_n(\tau)$. Собственные функции

можно выразить через полиномы Эрмита, используя равенство:
 $D_n(\tau) = 2^{-n/2} H_n(\tau) \exp(-\tau^2 / 2)$ [12].

Вторая модель – трехслойная среда конечной глубины Z : $N^2(z) = N_0^2 - 4\chi^2 z^2$ при $|z| \leq N_0 / 2\chi$, $N^2(z) = 0$ при $N_0 / 2\chi < |z| < Z$. Тогда при $|z| < 1$ в безразмерных переменных основная спектральная задача имеет вид (1). При $1 < |z| < h$, $h = Z / L$ имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi(z, k)}{\partial z^2} - k^2 \varphi(z, k) = 0, \quad \varphi(h, k) = \varphi(-h, k) = 0$$

Введем обозначения $F_{\pm}(z) = D_{\lambda}(\pm z \sqrt{2k / \omega})$. В интервале $(-h, -1)$ решение имеет вид $\varphi_-(z) = \text{sh } k(z + h)$. В интервале $(-1, 1)$ решение ищется в виде $\varphi(z) = C_1 F_-(z) + C_2 F_+(z)$. Условие сшивки, то есть равенства решений $\varphi_-(z)$, $\varphi(z)$ и их производных при $z = -1$ дает

$$C_1 = (\text{sh } k(h-1)F_+'(-1) - k \text{ch } k(h-1)F_+(-1)) / W(k, \omega)$$

$$C_2 = (\text{sh } k(h-1)F_-'(-1) - k \text{ch } k(h-1)F_-(-1)) / W(k, \omega)$$

$$W(k, \omega) = 2\sqrt{\pi k / \omega} / \Gamma((-k + \omega + k\omega^2) / 2\omega)$$

где $W(k, \omega)$ – вронскиан функций $F_{\pm}(z)$, $\Gamma(\tau)$ – гамма функция [12]. Условие сшивки при $z=1$ дает решение в интервале $(1, h)$ в виде $\varphi_+(z) = \varphi'(1) \text{sh } k(z-h) / \text{sh } k(1-h)$. Соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид: $\varphi'(1) / \varphi(1) = k \text{cth } k(1-h)$, разрешая которое относительно переменной k получаем совокупность дисперсионных кривых $\omega_n^2(k)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Третья модель – бесконечная трехслойная среда: $N^2(z) = N_0^2 - 4\chi^2 z^2$ при $|z| \leq N_0 / 2\chi$, $N^2(z) = 0$ при $z > N_0 / 2\chi$. При $|z| \leq 1$ в безразмерных переменных основная спектральная задача имеет вид (1). При $|z| > 1$

$$\frac{\partial^2 \varphi(z, k)}{\partial z^2} - k^2 \varphi(z, k) = 0$$

Используя условия сшивки при $z = \pm 1$, для собственных функций в интервале $(-\infty, -1)$ можно получить: $\varphi_-(z) = \exp(kz)$. В интервале $(-1, 1)$ имеем

$$\varphi(z) = \exp(-k)F_-(z)(F_+'(-1) - kF_+(-1)) / W(k, \omega) +$$

$$+ \exp(-k)F_+(z)(-F_-'(-1) - kF_-(-1)) / W(k, \omega) +$$

В интервале $(1, \infty)$ собственные функции имеют вид: $\varphi_+(z) = \varphi(1) \exp k(1-z)$. Уравнение $\varphi'(1) / \varphi(1) = -k$ определяет дисперсионные кривые $\omega_n^3(k)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что при $h \rightarrow \infty$ дисперсионные кривые $\omega_n^3(k)$ приближаются к $\omega_n^2(k)$.

Четвертая модель – трехслойная бесконечная среда: $N(z) = N_0$ при $|z| \leq L$, $N(z) = 0$ при $|z| > L$. В безразмерных переменных спектральная задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi(z, k)}{\partial z^2} - k^2(\omega^{-2} - 1)\varphi(z, k) = 0 \quad \text{при } |z| \leq 1$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(z, k)}{\partial z^2} - k^2 \varphi(z, k) = 0 \quad \text{при } |z| > 1, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \pm \infty$$

Обозначим далее $\Omega = k\sqrt{1 - \omega^{-2}} / \omega$. Далее необходимо использовать условия сшивки. Тогда в интервале $z < -1$ можно получить $\varphi_-(z) = \exp(kz)$. В интервале $|z| \leq 1$ имеем $\varphi(z) = \exp(-k)((k \cos \Omega - \Omega \sin \Omega) \sin \Omega z + (k \sin \Omega + \Omega \cos \Omega) \cos \Omega) / \Omega$. В интервале $z > 1$ получаем $\varphi_+(z) = \exp(-kz)(k \sin 2\Omega + \Omega \cos 2\Omega) / \Omega$. Дисперсионное соотношение имеет вид: $\text{tg } 2\Omega = 2k\Omega / (\Omega^2 - k^2)$, решая которое численно относительно ω можно получить счетный набор дисперсионных кривых $\omega_n^4(k)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Используя равенство $\text{tg } 2\Omega = 2 \text{tg } \Omega / (1 - \text{tg}^2 \Omega)$, для определения дисперсионных зависимостей получаем два уравнения: $\text{tg } \Omega = k / \Omega$ и $\text{tg } \Omega = -\Omega / k$.

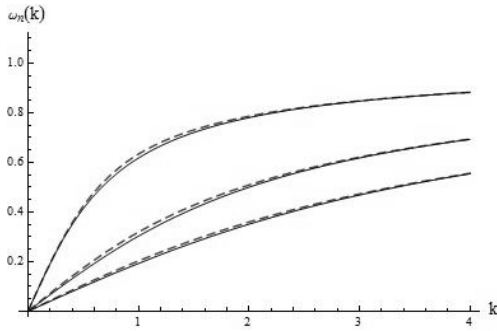


Рисунок 1. Дисперсионные кривые $\omega_n^1(k)$ (сплошная линия), $\omega_n^2(k)$ (пунктирная линия) первых трех мод.

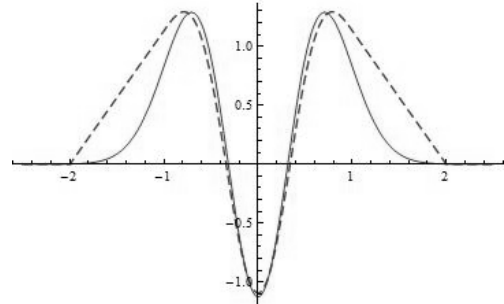
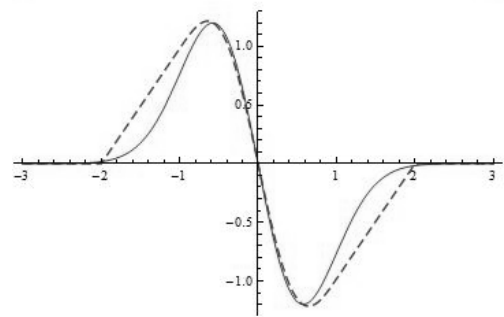
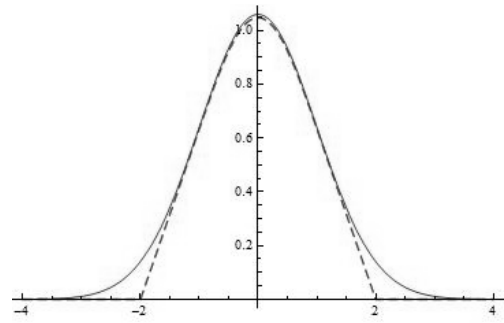


Рисунок 2. Собственные функции первых трех мод для первой (сплошная линия) и второй (штриховая) моделей.

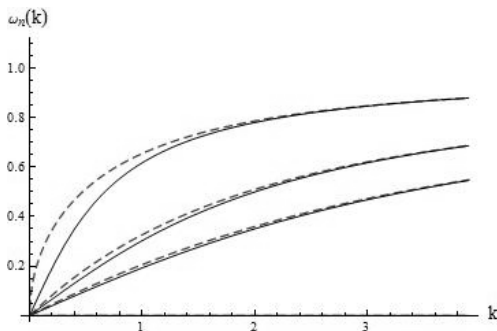


Рисунок 3. Дисперсионные кривые первых трех мод $\omega_n^1(k)$ (сплошная линия), $\omega_n^3(k)$ (пунктирная линия).

Решения первого уравнения определяют дисперсионные кривые с четными номерами мод: $\omega_n^4(k)$, $n=0, 2, 4, \dots$. Собственные функции в этом случае – четные и имеют вид $\varphi_-(z) = \exp(kz)$, $\varphi(z) = \exp(-kz) \cos \Omega z / \cos \Omega$, $\varphi_+(z) = \exp(-kz)$. Решая второе уравнение, получим дисперсионное соотношение с нечетными номерами мод $\omega_n^4(k)$, $n=1, 3, 5, \dots$ и соответствующими собственными функциями: $\varphi_-(z) = \exp(kz)$, $\varphi(z) = -\exp(-k) \sin \Omega z / \sin \Omega$, $\varphi_+(z) = -\exp(-kz)$.

На рис. 1 изображены дисперсионные кривые первых трех мод $\omega_n^1(k)$ (сплошная линия), $\omega_n^2(k)$ при $h=2$ (пунктирная линия). Из рисунков видно, что первая модель с отрицательными значениями квадрата частоты плавучести хорошо приближает дисперсионные кривые второй модели. На рис. 2 изображены собственные функции первых трех мод при $k=0.1$, сплошная линия – первая модель, штриховая – вторая модель. На рис. 3 изображены дисперсионные кривые первых трех мод $\omega_n^1(k)$ (сплошная линия), $\omega_n^3(k)$ при $h=2$ (пунктирная линия). Из представленных результатов видно, что дисперсионные кривые первой моды отличаются качественным поведением при малых k : дисперсионная кривая $\omega_0^1(k)$ имеет ограниченную фазовую скорость, и $\omega_0^3(k)$ –

неограниченную при малых волновых числах ($\omega_0^3(k) \approx \sqrt{k}$). Таким образом, дисперсионная кривая $\omega_0^3(k)$ сочетает в себе как свойства поверхностных волн при малых k , так и внутренних волн при больших k . Волновые моды $\omega_n^3(k)$, начиная с первой, имеют ограниченную фазовую скорость вблизи нуля. На рис. 4 представлены результаты расчетов дисперсионных кривых $\omega_n^4(k)$, $n = 0, 2, 4, \dots$ (пунктирная линия) и $\omega_n^4(k)$, $n = 1, 3, 5, \dots$ (сплошная линия).

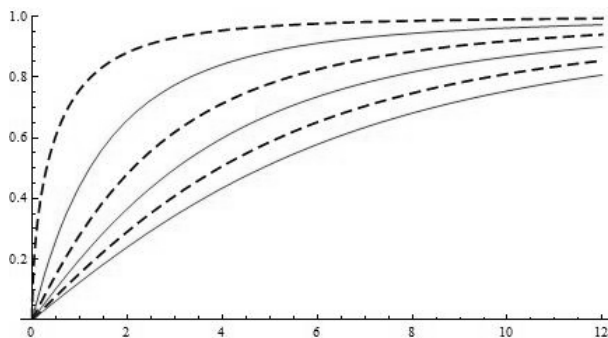


Рисунок 4. Дисперсионные кривые $\omega_n^4(k)$, $n = 0, 2, 4, \dots$ (пунктирная линия) и $\omega_n^4(k)$, $n = 1, 3, 5, \dots$ (сплошная линия).

Таким образом, полученные для модельных распределений частоты плавучести аналитические решения основной краевой задачи, позволяют в дальнейшем эффективно рассчитывать амплитудно-фазовые характеристики полей ВГВ в стратифицированной среде с непостоянной частотой Брента-Вяйсяля. и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики реального океана.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

Литература:

1. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 328 с.
2. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin: Springer, 2010. 260 p.
3. Sutherland B.R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
4. Massel S.R. Internal gravity waves in the shallow seas. Berlin: Springer, 2015. 163 p.
5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
6. Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K. Baroclinic tides. N.Y.: Cambridge University Press, 2005. 372 p.
7. Матюшин П.В. Классификация режимов течений стратифицированной вязкой жидкости около диска // Процессы в геосредах. 2017. № 4 (13). С.678 .
8. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves in horizontally inhomogeneous ocean // Velarde M.G. et al. (eds.). *The Ocean in Motion, Springer Oceanography*. Springer International Publishing AG, 2018. pp. 109.
9. Рындина В.В. Собственные частоты внутренних волн в жидкости и частота Брента-Вяйсяля. Ростов-на-Дону: Издательство ЦВВР, 2007. 128 с.
10. Букатов А.Е., Павленко Е.А. Пространственно-временная изменчивость распределения частоты плавучести в Чукотском море // Процессы в геосредах. 2017. № 3 (12). С.573
11. Kurkina O.E., Talipova T.G., Soomere T., Kurkin A. A., Rybin V.A. The impact of seasonal changes in stratification on the dynamics of internal waves in the Sea of Okhotsk // *Estonian Journal of Earth Sciences*. 2017. V. 66. N. 4. P. 238.
12. Никифоров А.Ф., Уваров В.В. Специальные функции математической физики. М.: ИД Интеллект, 2008. 344с.