

УДК 532.59:534.1

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ В СРЕДЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛАВУЧЕСТИ

© 2018 г. В. В. Булатов^{1,*}, Ю. В. Владимиров^{1,**}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

* E-mail: internalwave@mail.ru

** E-mail: vladimyura@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.02.2018 г.

Рассматривается задача о дальнем поле внутренних гравитационных волн от осциллирующего точечного источника возмущений, движущегося в бесконечном по вертикали слое стратифицированной среды переменной плавучести. Для модельного квадратичного распределения частоты плавучести двумя способами получено аналитическое решение задачи. В первом случае решение выражается через собственные функции вертикальной спектральной задачи и полиномы Эрмита. Во втором решение в форме характеристической функции Грина представляется через функции параболического цилиндра. Полученные аналитические решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики дальних полей внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде с непостоянной частотой Брента—Вяйсяля.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, дальние поля.

DOI: 10.31857/S056852810001778-6

В современных научных исследованиях при анализе динамики внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) широко применяются асимптотические методы исследования аналитических моделей волновой генерации [1–5]. Поля ВГВ в этих средах являются двумерными, а во многих случаях и трехмерными, поэтому в вычислительном плане анализ двумерных и трехмерных нестационарных волновых движений является весьма сложной задачей. Численные модели не позволяют эффективно рассчитывать конкретные физические задачи волновой динамики океана и атмосферы с учетом их реальной изменчивости, ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют большой вычислительной мощности, не всегда учитывают физическую специфику решаемых задач, что существенно ограничивает их практическую применимость. Кроме того, использование мощных численных алгоритмов требует верификации и сравнения с решениями модельных задач [6–8].

В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье, которые исследуются асимптотическими методами [4, 5, 9]. Целью настоящей работы является изучение дальних полей ВГВ, возбуждаемых осциллирующим источником возмущений, движущимся в бесконечной по вертикали стратифицированной среде переменной плавучести.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о дальних полях ВГВ, возникающих при движении точечного осциллирующего источника возмущений мощности $Q = q \exp(i\omega t)$, $q = \text{const}$ в безграничной по вертикали невязкой стратифицированной среде. Источник движется с постоянной скоростью V в горизонтальном направлении оси x , ось z направлена вверх, глубина залегания источника $-z_0$.

Рассматривается установившийся режим волновых колебаний. В движущейся системе координат и приближении Буссинеска имеем следующее уравнение, например, для вертикального смещения изопикн $\eta(x, y, z)$ (линий равной плотности с той же временной гармонической зависимостью) [9]

$$\left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Delta\eta + N^2(z)\Delta_2\eta = Q\left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x)\delta(y)\frac{\partial\delta(z-z_0)}{\partial z_0} \quad (1.1)$$

$$\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$$

где $N^2(z)$ — квадрат частоты Брента—Вяйсяля (частоты плавучести), $\rho_0(z)$ — невозмущенная плотность среды по глубине, g — ускорение свободного падения, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Далее будет использоваться модельное распределение частоты плавучести в виде $N^2(z) = N_0^2 - 4\chi^2 z^2$, широко применяемое в океанологических расчетах для изучения динамики ВГВ при наличии слоя скачка плотности морской среды. Замечательной особенностью Мирового океана является наличие термоклина — области быстрого изменения температуры и в то же время области большой устойчивости частоты плавучести. Зависимость частоты Брента—Вяйсяля от глубины в модельном представлении может отличаться от эмпирических зависимостей. Квадратичное распределение частоты плавучести позволяет решить задачу аналитически, в то время как использование эмпирических зависимостей требует применения только численных методов. Однако, как показывают многочисленные исследования, основные качественные результаты по описанию динамики ВГВ зависят, как правило, не от конкретной аналитической формы аппроксимации частоты плавучести, а от наличия максимума $N^2(z)$ в слое скачка плотности океанической воды [2, 3, 6, 10].

Граничное условие используется в виде

$$\eta \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty \quad (1.2)$$

В безразмерных координатах и переменных

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, z^* = \frac{z}{L}, \eta^* = \frac{\eta N_0 L^2}{q}, \omega^* = \frac{\omega}{N_0}, t^* = tN_0, L = \frac{N_0}{2}\chi, c = \frac{N_0^2}{2}\chi, M = \frac{V}{c}$$

уравнение (1.1) перепишется следующим образом (звездочка далее опускается)

$$\left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Delta\eta + (1 - z^2)\Delta_2\eta = \left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x)\delta(y)\frac{\partial\delta(z-z_0)}{\partial z_0} \quad (1.3)$$

Решение задачи (1.2), (1.3) ищется в виде интегралов Фурье

$$\eta(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \varphi(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y)) \quad (1.4)$$

Тогда для определения функции $\varphi(\mu, \nu, z)$ необходимо решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2((1 - z^2)(\omega - \mu M)^{-2} - 1)\varphi = \frac{-i}{(\omega - \mu M)} \frac{\partial\delta(z-z_0)}{\partial z_0} \quad (1.5)$$

$$\varphi(\mu, \nu, z) \equiv \varphi(k, z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty, k^2 = \mu^2 + \nu^2$$

Введем обозначение $p = \omega - \mu M$ и будем решать уравнение (1.5) с правой частью $i\delta(z - z_0)/p$. Решение задачи (1.5) $\varphi(k, z)$ ищется в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи

$$\varphi(k, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(k)\varphi_n(k, z) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_n(k, z)}{\partial z^2} + k^2((1 - z^2)p_n(k)^{-2} - 1)\varphi_n(k, z) = 0, \varphi_n(k, -\infty) = \varphi_n(k, \infty) = 0$$

2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Собственные числа $p_n(k)$ и ортонормированные собственные функции $\varphi_n(k, z)$, ортогональные с весом $1 - z^2$ на бесконечном интервале, имеют вид [4, 5]

$$p_n(k) = \frac{\sqrt{(2n+1)^2 + 4k^2} - (2n+1)}{2k} \quad (2.1)$$

$$\varphi_n(k, z) = B_n(k) H_n\left(\frac{z}{\alpha_n(k)}\right) \exp\left(\frac{-z^2}{2\alpha_n^2(k)}\right)$$

$$\alpha_n(k) = \sqrt{\frac{p_n(k)}{k}}, B_n(k) = k^{1/4} (1 + p_n^2(k)) \sqrt{\pi p_n(k) n! 2^{n-1}}^{-1/2}$$

где $H_n(z)$ — полиномы Эрмита [11]. Подставляя (2.1) в (1.5) и учитывая (1.6), можно получить

$$\varphi(k, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i p p_n(k) \varphi_n(k, z) \varphi_n(k, z_0)}{k^2 (p^2 - p_n^2(k))} \quad (2.2)$$

Решение в виде (2.2) можно получить также другим способом, построив характеристическую функцию Грина задачи (1.5) в виде

$$\varphi(p, k, z) = \frac{i F_-(p, k, z_-) F_+(p, k, z_+)}{p W(p, k)} \quad (2.3)$$

$$F_{\mp}(p, k, z) = D_{\lambda}\left(\mp z \sqrt{\frac{2k}{p}}\right)$$

$$z_- = \min(z, z_0), z_+ = \max(z, z_0), \lambda = \frac{k - |p| - kp^2}{2} |p|$$

Функция параболического цилиндра $D_{\lambda}(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 D_{\lambda}(\tau)}{\partial \tau^2} + \left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{4}\right) D_{\lambda}(\tau) = 0$$

где $W(p, k) = -2 \frac{\sqrt{\pi k}}{\Gamma(-\lambda)} \sqrt{p}$ — вронскиан функций $F_-(p, k, z)$ и $F_+(p, k, z)$, $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция [11–13].

Далее, используя формулу дополнения для гамма-функции, имеем: $\frac{1}{\Gamma(-\lambda)} = -\pi \Gamma(\lambda) \frac{\sin(\pi \lambda)}{\pi}$. Применяя к (2.3) теорему Миттаг—Лефлера о разложении мероморфной функции на простейшие дроби в полюсах знаменателя при $\lambda = n, n = 0, 1, 2, \dots$, можно получить дисперсионное соотношение (2.1).

С учетом соотношения $D_n(\sqrt{2}z) = 2^{-n/2} H_n(z) \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)$ можно получить выражение (2.2) [12, 13].

При интегрировании по переменной μ в формуле (1.4) необходимо учесть полюса подынтегральной функции $\varphi(k, z)$ из (2.2), которые определяются из уравнения

$$(\mu M - \omega)^2 = p_n(k) \quad (2.4)$$

В общем случае уравнение (2.4) имеет от двух до четырех действительных корней [9]. Рассмотрим случай $M > 1$ и $\omega < 1$, при котором (2.4) имеет два корня $\mu_{n1}(v)$, $\mu_{n2}(v)$ для любого действительного v .

Первая серия корней $\mu_{n1}(v)$ удовлетворяет уравнению $\mu M - \omega = p_n(k)$, корни этой серии удовлетворяют неравенству $\frac{\omega}{M} < \mu_{n1}(v) < \frac{1+\omega}{M}, n = 0, 1, 2, \dots$. Вторая серия корней определяется уравнением $\omega - \mu M = p_n(k)$, для корней которого справедливо неравенство: $\frac{\omega-1}{M} < \mu_{n2}(v) < \frac{\omega}{M}$.

Методом возмущений можно показать, что контур интегрирования по переменной μ проходит сверху полюсов. При $x < 0$, замыкая контур интегрирования вверх, получим, что поле экспоненциально мало — отсутствуют действительные полюсы. При $x > 0$, замыкая контур интегрирования

вниз, получим для отдельной волновой моды $\eta_{ni}(x, y, z, t)$ ($i = 1, 2$) с учетом гармонической временной зависимости от времени выражение

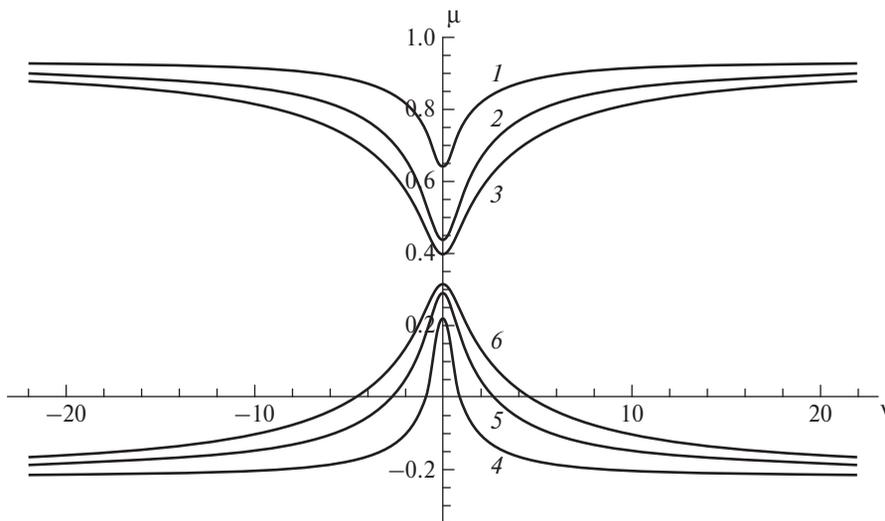
$$\eta_{ni}(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} T_{ni}(\mu, \nu, z) \cos(\mu x - \omega t) \cos(\nu y) d\nu \quad (2.5)$$

$$T_{ni}(\mu, \nu, z) = \frac{p_n^2(k) \varphi_n(k, z) \varphi_n(k, z_0)}{k^2 \left(M \mp \frac{p_n'(k) \mu}{k} \right)}$$

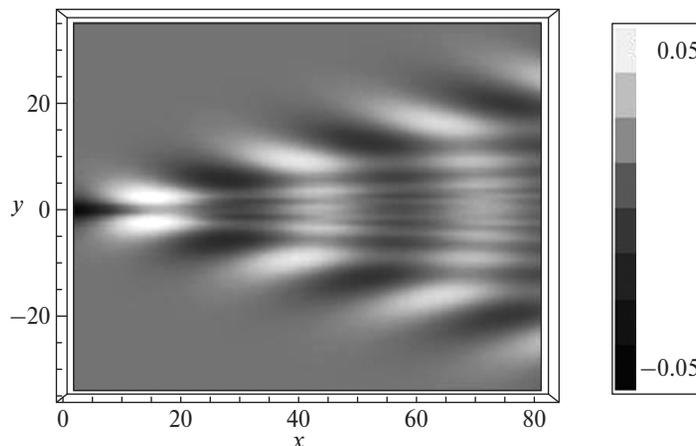
где при $i = 1$ в знаменателе берется знак “-” (значение $\mu = \mu_{n1}(\nu)$), при $i = 2$ в знаменателе — знак “+” (значение $\mu = \mu_{n2}(\nu)$).

3. ФАЗОВЫЕ И ВОЛНОВЫЕ КАРТИНЫ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПОЛЕЙ

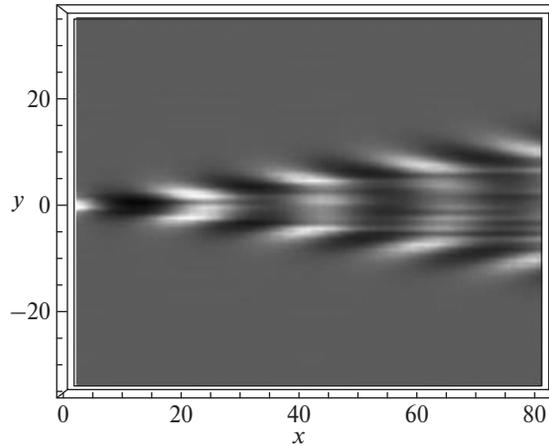
Далее для всех численных расчетов будут использоваться значения $M = 1.7$, $\omega = 0.6$. На фиг. 1 изображены три дисперсионные кривые первой серии $\mu_{01}(\nu)$, $\mu_{11}(\nu)$, $\mu_{21}(\nu)$ (кривые 1–3) и три дисперсионные кривые второй серии $\mu_{02}(\nu)$, $\mu_{12}(\nu)$, $\mu_{22}(\nu)$ (кривые 4–6). На фиг. 2 изображены вертикальные смещения изоцикн нулевой моды $\eta_{01}(x, y, z, t)$ первой серии при $z_0 = 0.3$, $z = -0.2$, $t = 8$. На фиг. 3 изображены вертикальные смещения изоцикн нулевой моды $\eta_{02}(x, y, z, t)$ второй серии при тех же значениях z_0 , z , t . На фиг. 4 изображена сумма слагаемых $\eta_{01}(x, y, z, t) + \eta_{02}(x, y, z, t)$.



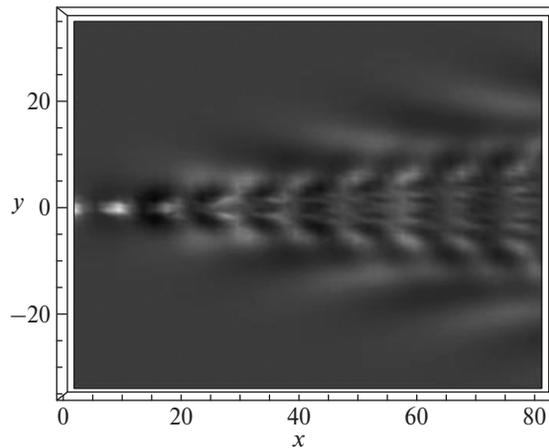
Фиг. 1. Дисперсионные кривые первых трех мод $\mu_{n1}(\nu)$ (1–3) и $\mu_{n2}(\nu)$ (4–6)



Фиг. 2. Нулевая мода возвышения η_{02}



Фиг. 3. Первая мода возвышения η_{12}



Фиг. 4. Суммарное поле возвышения $\eta_{02} + \eta_{12}$

Интегралы (2.5) в приближении метода стационарной фазы имеют вид ($i = 1$)

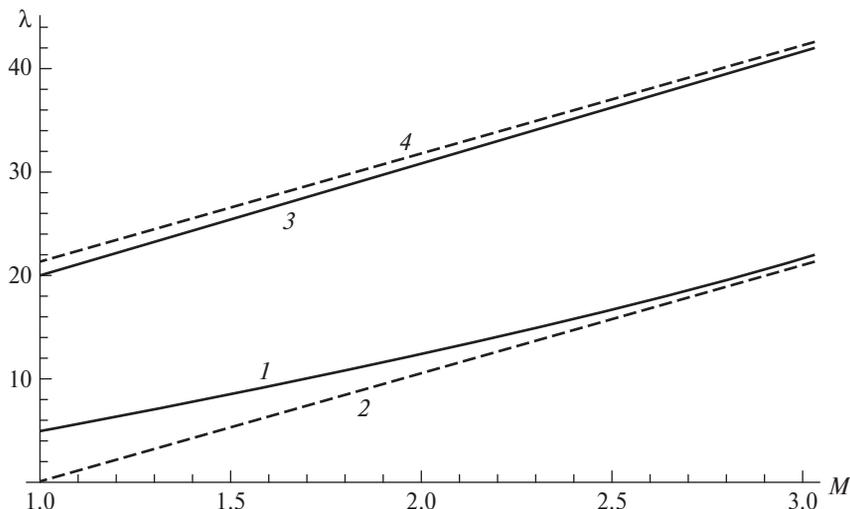
$$\eta_{n1}(x, y, z, t) = B_{n-} + B_{n+} \tag{3.1}$$

$$B_{n\pm} = \frac{T_{n1}(\mu_{n1}(v_{\pm}), v_{\pm}, z)}{\sqrt{2\pi x(\pm b_n(v_{\pm}))}} \cos\left(-i\left(\mu_{n1}(v_{\pm})x - v_{\pm}y \pm \frac{\pi}{4}\right)\right), b_n(v) = \frac{\partial^2 \mu_{n1}(v)}{\partial v^2}$$

где v_{\pm} — корни уравнения $\frac{\partial \mu_{n1}(v)}{\partial v} = \frac{y}{x}$. Полученное выражение применимо внутри волнового клина, угол полураствора θ каждого из которых определяется из соотношения $\theta = \text{arctg}(\mu_{n1}(v_n^*))$, где v_n^* — корень уравнения $b_n(v_n^*) = 0$. Аналогичные оценки можно получить и для интегралов $\eta_{n2}(x, y, z, t)$. Приближение (3.1) (неравномерная асимптотика) применимо только внутри волнового клина. Асимптотика, описывающая волновые поля вдали от источника возмущений, применяемая как вблизи, так и вдали от волнового клина (равномерная асимптотика), выражается через функцию Эйри и ее производную [4, 5, 9].

Рассмотрим далее зависимость длины волны возбуждаемых полей ВГВ, например вдоль оси x (при $y = 0$) от числа M при фиксированном значении ω и от частоты ω при фиксированном значении M . Параметр M изменяется при изменении ширины термоклина $\frac{N_0}{\chi}$, и при уменьшении ширины термоклина увеличивается значение M . Длина волны n -й волновой моды равна $\lambda = \frac{2\pi}{\mu_{n1}(0)}$.

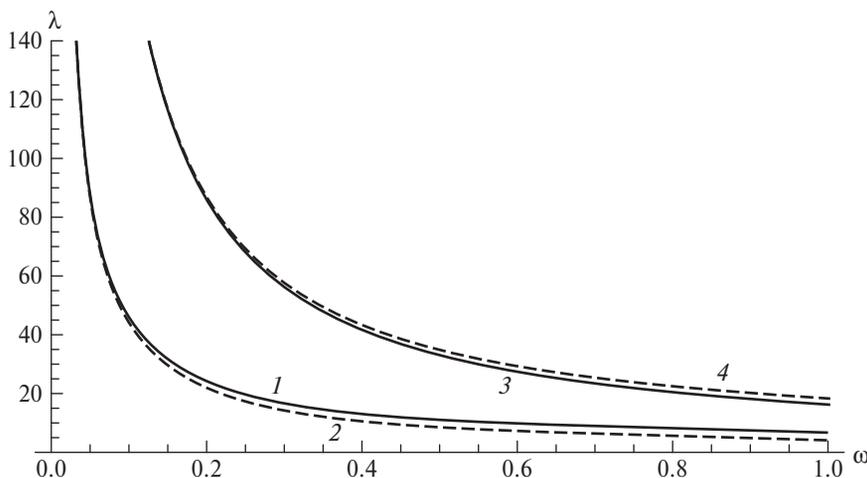
Численные расчеты показали, что вклад нулевой моды в полное волновое поле составляет до 80%, поэтому далее рассматривается случай $n = 0$. На фиг. 5 показаны точная (кривые 1, 3) зависимость



Фиг. 5. Зависимость длины волны λ от числа M для нулевых мод: 1, 2 — η_{01} ; 3, 4 — η_{02}

λ от M при фиксированном значении $\omega = 0.6$ и приближенная (кривые 2, 4) зависимость, имеющая при малых значениях μ вид $\lambda \approx \frac{2\pi(M-1)}{\omega}$ для η_{01} и $\lambda \approx \frac{2\pi(M+1)}{\omega}$ для η_{02} . Из представленных графиков следует, что длина волны ВГВ растет с увеличением числа M .

На фиг. 6 представлены точная (кривые 1, 3) зависимость λ от ω при фиксированном $M = 1.7$, полученная численным решением уравнения (2.4), и приближенная (кривые 2, 4) зависимость. Видно, что с увеличением ω растет длина поперечной волны ВГВ вдоль оси x (при $\omega = 0$ поперечные волны отсутствуют).



Фиг. 6. Зависимость длины волны λ от частоты ω для нулевых мод: 1, 2 — η_{01} ; 3, 4 — η_{02}

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о дальнем поле внутренних гравитационных волн от осциллирующего точечного источника возмущений, движущегося в бесконечной по вертикали стратифицированной среде переменной плавучести.

Рассмотрено модельное квадратичное распределения частоты Брента—Вяйсяля и показано, что аналитическое решение задачи можно получить двумя способами. Первой способ — решение ищется в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи, которые представимы в виде полиномов Эрмита. Второй способ — решение получается в виде характеристической функции Грина, которая выражается через функции параболического цилиндра. Показана эквивалентность обоих способов решения задачи.

Исследованы зависимости волновых характеристик возбуждаемых полей от основного параметра использованной модельной стратификации — ширины термоклина и от частоты осцилляций источника возмущений.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эккарт К.* Гидродинамика океана и атмосферы. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 328 с.
2. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: Introduction to wave dynamics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
5. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
6. *Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K.* Baroclinic tides. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2005. 372 p.
7. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mech. 2013. V. 720. P. 104–139.
8. *Rees T., Lamb K.G., Poulin F.J.* Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // SIAM J. Appl. Mathematics. 2012. V. 72. № 4. P. 1041–1060.
9. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 6. С. 26–34.
10. *Рындина В.В.* Собственные частоты внутренних волн в жидкости и частота Брента—Вяйсяля. Ростов н/Д.: Изд-во ЦВВР, 2007. 128 с.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с.
12. *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М.: Интеллект, 2008. 344 с.
13. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.