ДИНАМИКА ГАРМОНИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ГОИЗОНТАЛИ СРЕДЕ

В.В. Булатов, Ю.В. Владимиров
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, internalwave@mail.ru, vladimyura@yandex.ru

В работе рассмотрена задача о распространении гармонических по времени внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде с плотностью зависящей от вертикальной и горизонтальных координат. Построены асимптотические решения, позволяющие рассчитывать амплитудно-фазовые характеристики волновых полей. Приведено сравнение полученных теоретических результатов с данными натурных измерений полей внутренних волн в океане с переменной по горизонтали частотой плавучести.

Ключевые слова: *внутренние гравитационные волны, переменная частота плавучести, стратифицированная среда, лучевой метод.*

DYNAMICS OF HARMONIC INTERNAL GRAVITY WAVES IN STRATIFIED INHOMOGENEOUS MEDIUM

V.V.Bulatov, Yu.V.Vladimirov
A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, internalwave@mail.ru, vladimyura@yandex.ru

The problem of time-harmonic internal gravity waves dynamics in a stratified medium with a density depending on the vertical and horizontal coordinates is considered. Asymptotic solutions are constructed, which make it possible to calculate the amplitude-phase characteristics of the wave fields. The obtained theoretical results are compared with internal wave measurements in the real ocean with a non-uniform horizontal density distribution.

Keywords: *internal gravity waves, stratified medium, variable buoyancy frequency, ray method.*

На распространение внутренних гравитационных волн (ВВ) в океане существенное влияние оказывают горизонтальная неоднородность и нестационарность основных гидрофизических параметров. Настоящая работа посвящена изложению одному из обобщений метода геометрической оптики – пространственно-временному лучевому, который позволяет решить задачу моделирования динамики ВВ в неоднородном по горизонтали и стратифицированном по вертикали океане. Лучевые представления достаточно хорошо согласуются с интуитивными и эмпирическими представлениями о распространении ВВ в реальном океане. Этот метод достаточно универсален, а во многих случаях единственно возможный для приближенного расчета волновых полей в океане. К числу наиболее характерных горизонтальных неоднородностей реального океана можно отнести изменение рельефа дна, неоднородность по горизонтали поля плотности, изменчивость средних течений. Точное аналитическое решение, например, методом разделения переменных, получается только в том случае, если распределение плотности и форма дна описываются достаточно простыми модельными функциями. Когда форма дна и стратификация океана произвольны, можно построить только асимптотические представления решения или решать задачу численно. Однако численное решение не позволяет получать и анализировать качественные характеристики волновых полей на больших расстояниях, что необходимо для решения, например, проблемы обнаружения ВВ дистанционными методами, в том числе с помощью средств аэрокосмической радиолокации [1–8].

Математическое моделирование волновой динамики ВВ в неоднородном по горизонтали и стратифицированном по вертикали океане возможно с помощью модифицированного варианта пространственно-временнóго лучевого метода (метод геометрической оптики). Конкретная форма асимптотических представлений определяется из решения задач, описывающих динамику ВВ в стратифицированном по вертикали, горизонтально-однородном и стационарном океане. Как правило, при исследовании эволюции пакетов ВВ в океане с медленно меняющимися и нестационарными параметрами предполагается, что этот волновой пакет является локально гармоническим [1, 5].

Термин геометрическая оптика в научной литературе употребляется в различных значениях. Геометрическая оптика в узком, или лучевом, смысле изучает только способы построения изображения с помощью лучей, тогда как геометрическая оптика в широком, или волновом, понимании выступает как метод приближенного описания волновых полей. При волновом толковании, которое будет использовано в данной работе, лучи, как правило, образуют только геометрический костяк, на который «нашивается» волновое поле. В соответствии с двумя указанными толкованиями геометрической оптики в ее развитии выделяется два периода. Первоначальный лучевой период идейно был завершен фундаментальными трудами Гамильтона, которые также оказали существенное влияние на развитие классической механики. Построение лучей лежит в основе инструментальной геометрической оптики, ориентированной в основном на расчет различных оптических устройств. Современный волновой период геометрической оптики ведет свое начало с работ Дебая, которые оказали решающее влияние на формирование лучевых представлений в волновой теории [9, 10].

Асимптотические представления решений о распространении волновых пакетов в океане с неоднородной по горизонтали плотностью, а также проведенные численные расчеты для типичных океанических параметров свидетельствуют о существенном влиянии горизонтальной неоднородности на реальную динамику ВВ в океане. Все результаты моделирования волновой динамики, изложенные в настоящей работе, применимы для произвольных распределений плотности и других параметров стратифицированного океана, и их необходимо рассматривать в контексте непротиворечивости имеющимся данным натурных измерений ВВ в океане. Значение таких методов анализа волновых полей определяется не только их наглядностью, универсальностью и эффективностью при решении разнообразных задач, но и тем, что они могут явиться некоторой полуэмпирической основой других приближенных методов в теории распространения волновых пакетов в океане.

Исследованию волн в средах с медленно меняющимся параметрами посвящена обширная литература, в то же время проблеме исследования ВВ в средах с меняющимися параметрами (не в последнюю очередь в силу значительных математических трудностей, возникающих при решении этих задач) посвящено не так много работ. В данной работе изложены основные положения пространственно-временнóго лучевого метода (метод геометрической оптики) с учетом специфики ВВ, который позволяют исследовать волновую динамику в неоднородном по горизонтали и стратифицированном по вертикали океане.

Исходной для анализа является линеаризованная система уравнений гидродинамики [1, 5, 11, 12]

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \ \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \ \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,,\;\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_1\frac{\partial \rho_0}{\partial x}+u_2\frac{\partial \rho_0}{\partial y}+w\frac{\partial \rho_0}{\partial z}=0$$

Здесь (u_1, u_2, w) – компоненты вектора скорости ВВ, p и ρ – возмущения давления и плотности, g – ускорение силы тяжести (ось z направлена вниз). С использованием приближения Буссинеска, означающего, что невозмущенная плотность $\rho_0(z,x,y)$ в первых трех уравнениях системы (1) считается постоянной величиной, система (1) приводится к следующему виду

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2}+\Delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{g}{\rho_0}\Delta(u_1\frac{\partial \rho_0}{\partial x}+u_2\frac{\partial \rho_0}{\partial y}+w\frac{\partial \rho_0}{\partial z})=0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u_1+\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x})=0\,,\;\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u_2+\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y})=0\,,\;\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

В качестве граничных условий используется условие «твердой крышки» на поверхности: $W=0$, $(z=0,\,-H)$, H – глубина океана. При решении задачи предполагается, что в среде с неоднородным по горизонтали полем плотности можно пренебречь стационарными течениями, вызванными этим полем. Действительно, из уравнений гидродинамики следует, что если невозмущенная плотность является функцией горизонтальных координат, то из существования стационарного распределения плотности $\rho_0(z,x,y)$ следует существование стационарных течений. Однако вследствие медленности этих течений ими можно пренебречь в первом приближении. Поэтому обычно считается, что $\rho_0(z,x,y)$ есть некоторое фоновое поле плотности, сформировавшееся под воздействием массовых сил и неадиабатических источников и задается *a priori*, например из эксперимента [1, 5, 12].

Рассмотрим далее гармонические волны (u_1, u_2, w, p) = $\exp(i\omega t)(U_1,U_2,W,P)$. Решение системы (2) невозможно методом разделения переменных, поэтому необходимо использовать асимптотические методы, а также тот факт, что масштабы изменений параметров океана по горизонтали могут превышать масштабы вертикальной изменчивости [1–4]. Введем далее безразмерные переменные: $x^*=x/L$, $y^*=y/L$, $z^*=z/l$ где L – характерный масштаб изменения плотности ρ_0 по горизонтали; l – характерный масштаб изменения ρ_0 по вертикали (например, ширина термоклина). В безразмерных координатах система (1) будет иметь следующий вид (звездочка в индексе далее опускается)

$$-\omega^2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\delta^{-2}\Delta W\right)+\delta^{-2}\frac{g_1}{\rho_0}\left(\delta^{-1}U_1\frac{\partial \rho_0}{\partial x}+\delta^{-1}U_2\frac{\partial \rho_0}{\partial y}+W\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)=0\,, \tag{3}$$

$$\delta^{-1}\Delta U_1+\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}=0\,,\;\delta^{-1}\Delta U_2+\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}=0\,,\;\delta=\frac{L}{l}>>1\,,\,g_1=\frac{g}{l}$$

Для определения функции $D=P/\rho_0$ будем иметь уравнение

$$\delta^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial D}{\partial z}\alpha^{-1}\right)-\Delta D=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha^{-1}\nabla D\nabla\chi\right), \tag{4}$$

$$\delta^2\frac{\partial D}{\partial z}+\nabla D\nabla\chi=0\,,\text{ при } z=0,-H$$

$$\chi(z,x,y)=g\omega^{-2}l^{-1}\ln\rho_0\,,\;\alpha(z,x,y)=\omega^{-2}N^2(z,x,y)-1\,,\;\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

где $N^2(z,x,y)=g_1/\rho_0\;\partial\rho_0/\partial z$ – частота Брента–Вяйсяля, зависящая от вертикальной и горизонтальных координат. Асимптотическое решение (3) ищется в виде, типичном для метода геометрической оптики,

$$\mathbf{V}(z,x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}(i\delta)^{-m}\mathbf{V}_m(z,x,y)\exp(i\delta S(x,y)),\ \mathbf{V}(z,x,y)=(U_1(z,x,y),U_2(z,x,y),W(z,x,y)),$$

где функции $S(x,y)$ и вектор-функция $\mathbf{V}_m, m$ = 0, 1… подлежат определению. В дальнейшем, как правило, ограничиваются нахождением только главного члена этого асимптотического разложения для вертикальной компоненты скорости $W_0(z,x,y)$. Из двух последних уравнений системы (3) можно получить

$$U_{10}=-\frac{i\partial S/\partial x}{|\nabla S|^2}\frac{\partial W_0}{\partial z},\ U_{20}=-\frac{i\partial S/\partial y}{|\nabla S|^2}\frac{\partial W_0}{\partial z},|\nabla S|=\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2$$

Приравнивая члены порядка O(1), можно получить уравнение для определения функции $W_0(z,x,y)$, имеющее вид

$$\frac{\partial^2 W_0(z,x,y)}{\partial z^2}+|\nabla S|^2\left(\frac{N^2(z,x,y)}{\omega^2}-1\right)W_0(z,x,y)=0, \tag{5}$$

$$W_0(0,x,y)=W_0(-H,x,y)=0$$

Как известно, основная краевая вертикальная спектральная задача ВВ (5) имеет счетный набор собственных функций W_{0n} и собственных чисел $K_n(x,y,\omega)\equiv|\nabla S_n|$. В дальнейшем функции $W_{0n}(z,x,y)$, $K_n(x,y,\omega)$ предполагаются известными. Для нахождения функций $S_n(x,y)$ будем иметь уравнение эйконала:

$$(\partial S_n/\partial x)^2+(\partial S_n/\partial y)^2=K_n^2(x,y)$$

Начальные условия для эйконала S_n в плоском случае задаются на некоторой линии $\Omega: x_0(\tau), y_0(\tau)$, $S_n(x,y)|_{\Omega}=S_{0n}(\tau)$. Для решения уравнения эйконала каждой волновой моды строятся лучи, т.е. характеристики этого уравнения, имеющие вид

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{r}{K(x,y)},\ \frac{dr}{d\sigma}=\frac{\partial K(x,y)}{\partial x},\ \frac{dy}{d\sigma}=\frac{q}{K(x,y)},\ \frac{dq}{d\sigma}=\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}, \tag{6}$$

где $r=\partial S_n/\partial x,\quad q=\partial S_n/\partial y,\quad d\sigma$ – элемент длины луча (характеристики) [1,5,9,10]. Начальные условия r_0 и q_0 для решения (6) определяются из системы:

$$r_0\frac{\partial x_0}{\partial\tau}+q_0\frac{\partial y_0}{\partial\tau}=\frac{\partial S_0}{\partial\tau},\ r_0^2+q_0^2=K_n^2(x_0(\alpha),y_0(\alpha)),$$

решение которой и начальные условия $x_0(\tau), y_0(\tau), r_0(\tau), q_0(\tau)$ определяют характеристику (луч) $x=x(\sigma,\tau),\ y=y(\sigma,\tau)$. После нахождения характеристики (луча) эйконал S_n определяется интегрированием вдоль этого луча: $S_n=S_{0n}(\tau)+\int_0^{\sigma}K_n(x(\sigma,\tau),y(\sigma,\tau))d\sigma$.

Собственные функции $W_{0n}(z,x,y)$ определяются с точностью до умножения на произвольную функцию $B_{0n}(x,y): W_{0n}(z,x,y)=B_{0n}(x,y)f_{0n}(z,x,y)$, где $f_{0n}(z,x,y)$ – решение основной вертикальной спектральной задачи (5) с нормировкой

$$\int_{-H}^{0}(N^2(z,x,y)-\omega^2)f_{0n}^2(z,x,y)dz=1 \tag{7}$$

Решение задачи (4) ищется в виде

$$D(z,x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(z,x,y)\,\Phi_n(z,x,y)\exp(i\delta S_n(x,y))$$

Функции $\Phi_n(z,x,y)$ удовлетворяют краевой задаче

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi_n(z,x,y)}{\partial z}\alpha^{-1}\right)+K_n^2(x,y,\omega)\Phi_n(z,x,y)=0 \qquad (8)$$

$\partial\Phi_n(z,x,y)/\partial z=0$, при $z=0,-H$. Функции $A_n(z,x,y)$ ищутся в виде (индекс n далее опускается)

$$A(z,x,y)=A_0(x,y)+\sum_{m=1}^{\infty}(i\delta)^{-m}A_m(z,x,y)$$

Тогда для определения функции $A_0(x,y)$ получается уравнение переноса

$$2\Lambda\nabla S\nabla A_0+\Lambda A_0\Delta S+A_0(\nabla\Lambda+\boldsymbol{I})=0 \qquad (9)$$

$$\Lambda=\int_{-H}^{0}\Phi^2(z,x,y)dz\ ,\ \boldsymbol{I}=\frac{1}{2}\int_{-H}^{0}\frac{\nabla\chi}{\alpha}\frac{\partial\Phi^2}{\partial z}dz$$

Вдоль характеристик (лучей) уравнение (9) имеет решение

$$A_0^2(\sigma)\Lambda(\sigma)K(\sigma)da(\sigma)=A_0^2(\sigma_0)\Lambda(\sigma_0)K(\sigma_0)da(\sigma_0)Z \qquad (10)$$

$$Z=\exp\left(-\int_{-\sigma_0}^{\sigma}I\nabla S(\Lambda K)^{-1}d\sigma\right)$$

где $da(\sigma)=R(\sigma)d\sigma$ – ширина элементарной лучевой трубки, $R(\sigma)$ – геометрическая расходимость лучей (характеристик) [5,9,10]. Можно показать, что экспоненциальный множитель Z в (10) равен $K(\sigma)/K(\sigma_0)$, тем самым решение для $A_0(\sigma)$ существенно упрощается

$$A_0^2(\sigma)\Lambda(\sigma)da(\sigma)=A_0^2(\sigma_0)\Lambda(\sigma_0)da(\sigma_0) \qquad (11)$$

Преобразуем выражение для $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{I}=\int_{-H}^{0}\frac{\nabla\chi}{\alpha}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz=-\frac{1}{2K^2}\int_{-H}^{0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\nabla\chi dz= \qquad (12)$$

$$=\frac{1}{2K^2}\int_{-H}^{0}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\chi)\left(\alpha^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\nabla\chi dz=\frac{1}{2\omega^2K^2}\int_{-H}^{0}\nabla N^2(z,x,y)\left(\alpha^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2dz$$

Здесь второе равенство получено в силу уравнения (8), а третье – интегрированием по частям. Покажем далее, что

$$-\Lambda\nabla\ln K=\frac{1}{2\omega^2K^2}\int_{-H}^{0}\nabla N^2(z,x,y)\left(\alpha^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2dz \qquad (13)$$

С этой целью применим к уравнению (8) оператор ∇ и обозначим $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial z}\alpha^{-1}\right)+K^2\boldsymbol{F}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\nabla(\alpha^{-1})\right)-\Phi\nabla K^2$$

$\partial\boldsymbol{F}/\partial z=0$, при $z=0,-H$. Воспользуемся условием ортогональности правой части полученного уравнения к функции Φ в виде

$$\nabla K^2\int_{-H}^{0}\Phi^2(z,x,y)dz=\int_{-H}^{0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\omega^{-2}\alpha^{-2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\nabla N^2\right)\Phi\,dz$$

Интегрируя правое выражение по частям, получаем соотношение (13). Сравнивая (12) и (13) можно получить

$$\boldsymbol{I}=-\Lambda\nabla\ln K \qquad (14)$$

Подставляя в экспоненту (10) выражение (14) и учитывая уравнения лучей (6) получаем соотношение (11). Заметим, что собственные функции задачи (8) связаны с собственными функциями $W_{0n}(z,x,y)$ задачи (5) равенством: $W_{0n} = \alpha^{-1}(\partial\Phi_n / \partial z)$. Тогда для их нормировок будем иметь

$$\Lambda = \int_{-H}^{0} \Phi_n^2(z,x,y)dz = \int_{-H}^{0} (N^2 - \omega^2)W_{0n}^2 dz = M\omega^{-2}K_n^{-2}$$

Если выполняется условие нормировки (7), то $M = 1$, и закон сохранения вдоль характеристик (лучей) можно представить в виде

$$\frac{A_0^2(\sigma)da(\sigma)}{K^2(\sigma)} = \frac{A_0^2(\sigma_0)da(\sigma_0)}{K^2(\sigma_0)} \qquad (15)$$

Таким образом, характеристик (лучей) эйконала можно получить закон сохранения в виде

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\ln \frac{A_0^2(x,y)R(x,y)}{K^2(x,y)} \right) = 0,$$

где $R(x,y)$ – геометрическая расходимость лучей (характеристик). Отметим, что поток волновой энергии пропорционален $A_0^2K^{-1}J$, где J – ширина элементарной лучевой трубки, поэтому в данном случае сохраняется величина равная потоку волновой энергии, деленной на модуль волнового вектора [1,5,12].

Общая схема расчета полей ВВ в стратифицированном по вертикали и неоднородном по горизонтали океане имеет вид:

- для произвольного распределения частоты Брента–Вяйсяля решается основная вертикальная спектральная задача ВВ (5) и определяются соответствующие нормированные собственные функции и собственные числа;
- численно решаются характеристические системы (6) с соответствующими начальными условиями;
- после нахождения характеристик (лучей) эйконал (значение фазы) фазовых функций определяется численным интегрированием вдоль этих лучей;
- геометрическая расходимость лучевых трубок определяется, например, численным дифференцированием близко расположенных характеристик;
- амплитуда ВВ вычисляется из уравнения соответствующих законов сохранения (15) вдоль лучей (характеристик), где правая часть равенств определяется с помощью принципа локальности, т.е. предполагается, что на некоторых характерных пространственных интервалах параметры океана можно считать неизменными по горизонтали. Таким образом, на этих пространственно-временных масштабах предполагается, что океан является однородным по горизонтали, а его плотность произвольно зависит от вертикальной координаты.

Далее сравним полученные аналитические результаты с анализом измерений изменчивости ВВ в реальной среде с переменными по горизонтали характеристиками, а именно в северо-западной части Тихого океана, по данным, полученным на буйковых станциях эксперимента "Мегаполигон" в северной части Тихого океана. Измерения течений и температуры на буйковых станциях "Мегаполигона" позволило изучить изменчивость приливных внутренних волн на площади 460×520 км. Длина приливной внутренней волны рассчитывалась интегрированием основного спектрального вертикального уравнения ВВ (5) для реального распределении частоты Вяйсяля-Брента по глубине и нулевых граничных условиях на поверхности и дне океана. Рассчитанная таким образом длина волны для первой моды в районе «Мегаполигона» равнялась около 130 км и около Императорского хребта длина волны становится больше и равна 167 км, а в 2000 км к востоку она равняется 156 км. Можно рассмотреть изменение амплитуд ВВ при их распространении на запад и на восток от Императорских гор. Амплитуды ВВ рассчитывались по отклонению измеренных значений температуры на буйковых станциях от среднего значения и последующим делением этой величины на средний вертикальный градиент температуры. Расчеты показывают, что амплитуда ВВ уменьшается приблизительно на 10% на расстоянии, равном одной длине приливной внутренней волны (130-150 км) [6,7,12].

Далее можно оценить влияние различных факторов, в том числе неоднородность плотности по горизонтали, на затухание ВВ. В рамках вышеизложенной теории рассмотрим эволюцию ВВ частоты ω, соответствующей полусуточному периоду $T = 12$ часов, при этом допускается медленное изменение стратификации вдоль трассы распространения волны. На основании реальной геометрии эксперимента предполагается, что рассматриваемая задача является двумерной, то есть стратификация зависит только от двух переменных: глубины z и расстояния вдоль трассы распространения волны x. Рассмотрим случай постоянной глубины H и стратификации N, линейно зависящей только от x: $N(x) = N_1 + (N_2 - N_1)x / X$, где X – расстояние между двумя точками наблюдения, $x = x_1 = 0$ – начальная точка, $x = x_1 = X$ – конечная точка; $N_{1,2} = N(x_{1,2})$. Рассмотрим первую моду $W_1(z,x)$ амплитуды ВВ, опуская ее индекс. В этом случае функция $W(z,x)$ ищется в виде: $W(z,x) = A(x) f(z,x)$, где $f(z,x)$ – нормированная собственная функция стандартной краевой задачи уравнения ВВ с нормировкой (7), которая имеет вид:

$$f(z,x) = \sqrt{\frac{2}{H(N^2(x)-\omega^2)}}\sin(\pi z / H).$$

Амплитуда $A(x)$, зависящая только от x, находится из следующего закона сохранения

$$\frac{A^2(x_1)}{k^2(x_1)}da(x_1) = \frac{A^2(x_2)}{k^2(x_2)}da(x_2)$$

где $k(x)$ – модуль горизонтального волнового вектора, $da(x)$ – ширина элементарной волновой трубки. Поскольку задача двумерная, то ширина лучевой трубки не меняется вдоль луча и закон сохранения упрощается: $A(x)/k(x) = const$. В силу малости рассматриваемых значений ω, скорость распространения волны близка к максимальной групповой скорости $c(x) = N(x)H/\pi$, поэтому волновое число $k(x) = \omega\pi / N(x)H$ и соответствующая ему длина волны $\lambda(x) = 2N(x)H/\omega$. Тогда, считая, что глубина точек наблюдения одинаковая, будем иметь из закона сохранения $(A_{1,2} = A(x_{1,2}))$: $A_1N_1 = A_2N_2$, или $A_2 = A_1\lambda_1/\lambda_2$. Тогда выражения для амплитуды имеют вид: $W_{1,2} = A_{1,2}\sqrt{2/H(N_{1,2}^2-\omega^2)}$. Отсюда имеем $W_2 = W_1\, N_1/N_2\sqrt{(N_1^2-\omega^2)/(N_2^2-\omega^2)}$ или, поскольку $\omega \ll N$, то $W_2 = W_1\lambda_1^2/\lambda_2^2$, то есть амплитуда внутренней волны обратно пропорциональна квадрату длины волны. Время пробега волны τ вдоль горизонтального луча определяется из уравнения характеристик $dx/dt = c(x)$, $c(x) = (N_1 + ax)H/\pi$, $a = (N_2 - N_1)/X$. Интегрируя это уравнение, можно определить время пробега волны

$$\tau = \frac{\pi}{aH}\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right) = \frac{XT}{(\lambda_2-\lambda_1)}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \quad (16)$$

Имеющиеся натурные данные дают следующие значения основных параметров :

$\lambda_1 = 167$ км, $\lambda_2 = 156$ км, $X = 2000$ км. Коэффициент затухания (без учета изменения длины волны), описывающий степень уменьшения амплитуды на длине волны, далее обозначаемый через β, с учетом известного из результатов наблюдений соотношения $W_2 / W_1 = 0.2 \equiv \beta^{t/T} = \beta^{X/\lambda}$, дает значение для $\beta : \beta = 0.2^{167/2000} = 0.874$. Затухание с учетом изменения длины волны вдоль луча: $W_2 / W_1 = \beta^{\tau/T}$, где значение τ, определяемое из соотношения (16), дает значение для β = 0.878. Таким образом, полученные оценки позволяют утверждать, что учет влияния неоднородностей поля плотности с помощью изложенного в работе метода является одним из факторов, определяющих масштабы пространственного затухания полей ВВ, наблюдаемых в натурных измерениях [6, 7, 12–14].

Универсальный характер использованного асимптотического метода моделирования полей ВВ в океане позволяет эффективно рассчитывать волновые поля и, кроме того, качественно анализировать полученные решения. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно и для правильной постановки математических моделей волновой динамики, и для проведения экспресс оценок при натурных измерениях ВВ в морской среде.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

Литература:

1. Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V. Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p
2. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin: Springer, 2010. 260 p.
3. Sutherland B.R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press , 2010. 394 p.
4. Massel S.R. Internal gravity waves in the shallow seas. Berlin: Springer, 2015. 163 p.
5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
6. Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K. Baroclinic tides. N.Y.: Cambridge University Press, 2005. 372 p.
7. Morozov E.G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
8. Wang J., Wang S., Chen X., Wang W., Xu Y. Three-dimensional evolution of internal waves reflected from a submarine seamount // Physics of Fluids. 2017. V. 29. P. 106601
9. Арнольд А.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
10. Babich V.M., Buldyrev V.S. Asymptotic methods in short-wavelenght diffraction theory. Oxford: Alpha Science, 2007. 480 p.
11. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Аналитические решения уравнения внутренних гравитационных волн для модельных распределений плавучести // Процессы в геосредах. 2018. № 2 (15). С.833 .
12. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Internal gravity waves in horizontally inhomogeneous ocean // M. G. Velarde et al. (eds.). The Ocean in Motion, Springer Oceanography. Springer International Publishing AG. 2018. P.109.
13. Букатов А.Е., Павленко Е.А. Пространственно-временная изменчивость распределения частоты плавучести в Чукотском море // Процессы в геосредах. 2017. № 3 (12). С.573
14. Kurkina O.E., Talipova T.G., Soomere T., Kurkin A. A., Rybin V.A. The impact of seasonal changes in stratification on the dynamics if internal waves in the Sea of Okhotsk // Estonian Journal of Earth Sciences. 2017. V. 66. N. 4. P. 238.