

УДК 532.59:534.1

## ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ДВИЖУЩИМСЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛАВУЧЕСТЬЮ

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия  
E-mails: internalwave@mail.ru, vladimyura@yandex.ru

Рассматривается задача о дальнем поле, генерируемом внутренними гравитационными волнами от осциллирующего точечного источника возмущений, движущегося в стратифицированной бесконечной по вертикали среде с переменной плавучестью. Для модельного квадратичного распределения частоты плавучести получены аналитические решения основной краевой задачи, выраженные через функции параболического цилиндра. Построенные в работе асимптотические решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики дальних полей, генерируемых внутренними гравитационными волнами в стратифицированной среде с непостоянной частотой Брента — Вайсяля.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, переменная частота плавучести.

DOI: 10.15372/PMTF20190103

При анализе динамики внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) широко применяются асимптотические методы исследования аналитических моделей волновой генерации [1–6]. В этих средах поля ВГВ являются двумерными, а во многих случаях трехмерными, поэтому численное исследование двумерных и трехмерных нестационарных волновых движений является достаточно сложной задачей. Численные модели не позволяют эффективно решать физические задачи волновой динамики океана и атмосферы с учетом их реальной изменчивости, ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют большой вычислительной мощности, не всегда учитывают специфику решаемых задач, что существенно ограничивает возможности их применения на практике. Кроме того, использование численных алгоритмов требует верификации и сравнения с решениями модельных задач [4, 6]. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых полей с помощью интегралов Фурье и асимптотическом анализе получаемых решений [5, 7, 8].

Целью настоящей работы является исследование дальних полей ВГВ, возбуждаемых осциллирующим источником возмущений, движущимся в бесконечной по вертикали стратифицированной среде с переменной плавучестью.

---

Работа выполнена в рамках государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

© Булатов В. В., Владимиров Ю. В., 2019

**1. Постановка задачи и интегральные формы решений.** Рассматривается задача о дальних полях ВГВ, возникающих при движении точечного источника возмущений мощностью  $Q = q e^{i\omega t}$ ,  $q = \text{const}$ , пульсирующего по гармоническому закону в безграничной по вертикали невязкой стратифицированной среде. Источник движется с постоянной скоростью  $V$  в направлении оси  $x$ , ось  $z$  направлена вверх, глубина залегания источника равна  $z_0$ . Рассматривается установившийся режим волновых колебаний. В движущейся системе координат в приближении Буссинеска имеем следующее уравнение, описывающее вертикальное смещение изопикн  $\eta(x, y, z)$  (линий равной плотности с гармонической зависимостью от времени) [7]

$$\begin{aligned} \left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Delta\eta + N^2(z)\Delta_2\eta &= Q \left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta(x)\delta(y) \frac{\partial\delta(z - z_0)}{\partial z_0}, \\ \Delta &= \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $N(z)$  — частота Брента — Вайсяля (частота плавучести);  $\rho_0(z)$  — невозмущенная плотность среды по глубине;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Далее будем использовать модельное распределение частоты плавучести в виде  $N^2(z) = N_0^2 - 4\chi^2 z^2$ , широко применяемое в расчетах для изучения динамики ВГВ при наличии постоянного термоклина (слоя скачка плотности) [1, 3, 5, 8]. Особенностью Мирового океана является наличие постоянного слоя скачка плотности — области быстрого изменения температуры и в то же время области устойчивости частоты плавучести. Теоретическая зависимость частоты Брента — Вайсяля от глубины может отличаться от эмпирических зависимостей, которые также имеют максимум  $N^2(z)$  в слое скачка плотности морской среды. Квадратичное распределение частоты плавучести позволяет решить задачу аналитически, в то время как использование эмпирических зависимостей требует применения численных методов. Однако основные качественные результаты исследования динамики ВГВ зависят, как правило, не от конкретной аналитической формы аппроксимации частоты плавучести, а от существования максимума функции  $N^2(z)$  в слое скачка плотности океанической воды [1, 3, 4, 9].

Граничное условие имеет вид

$$\eta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \pm\infty. \quad (1.2)$$

В безразмерных координатах и переменных

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad \eta^* = \frac{\eta N_0 L^2}{q}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{N_0}, \\ t^* &= t N_0, \quad L = \frac{N_0}{2\chi}, \quad c = \frac{N_0^2}{2\chi}, \quad M = \frac{V}{c} \end{aligned}$$

уравнение (1.1) запишем следующим образом (далее индекс “\*” опускается):

$$\left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Delta\eta + (1 - z^2)\Delta_2\eta = \left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta(x)\delta(y) \frac{\partial\delta(z - z_0)}{\partial z_0}. \quad (1.3)$$

Решение задачи (1.2), (1.3) находим в виде интегралов Фурье

$$\eta(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) e^{-i(\mu x + \nu y)} d\mu. \quad (1.4)$$

Тогда для определения функции  $\varphi(\mu, \nu, z)$  необходимо решить краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{1 - z^2}{(\omega - \mu M)^2} - 1 \right) \varphi &= -\frac{i}{\omega - \mu M} \frac{\partial \delta(z - z_0)}{\partial z_0}, \\ \varphi(\mu, \nu, z) &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow \pm\infty, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

**2. Построение аналитических решений краевой задачи.** Решение задачи (1.5) имеет вид

$$\varphi_1(p, k, z) = \frac{iF_-(p, k, z_-)F_+(p, k, z_+)}{pW(p, k)},$$

$$F_{\mp}(p, k, z) = D_{\lambda}(\mp z\sqrt{2k/p}), \quad z_- = \min(z, z_0), \quad z_+ = \max(z, z_0), \quad (2.1)$$

$$p = \mu M - \omega, \quad \lambda = (k - p - kp^2)/(2p),$$

где  $D_{\lambda}(\tau)$  — функция параболического цилиндра, удовлетворяющая уравнению [10]

$$\frac{\partial^2 D_{\lambda}(\tau)}{\partial \tau^2} + \left( \lambda + \frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{4} \right) D_{\lambda}(\tau) = 0, \quad (2.2)$$

$W(p, k) = -2\sqrt{\pi k}/\Gamma(-\lambda)\sqrt{p}$  — вронскиан функций  $F_-(p, k, z)$  и  $F_+(p, k, z)$ ;  $\Gamma(\lambda)$  — гамма-функция [11]. Поскольку функция  $F_-(p, k, z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$ , функция  $F_+(p, k, z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , функция  $\varphi_1(p, k, z)$  удовлетворяет граничному условию задачи (1.5). Полученное выражение для функции Грина (2.1) справедливо при  $p > 0$ . Далее построим решение задачи (1.5) при  $p < 0$ . Для этого используем другую пару линейно независимых решений уравнения (2.2):  $F_{\mp}(p, k, z) = D_{-\lambda-1}(\mp iz\sqrt{2k/p})$  с вронскианом  $W(p, k) = -2\sqrt{\pi k}/(\Gamma(\lambda+1)\sqrt{-p})$  (значение  $\lambda$  определено в (2.1)). Полученное решение обозначим через  $\varphi_2(p, k, z)$ , тогда при любых значениях  $p$  решение задачи (1.5) имеет вид

$$\varphi(p, k, z) = \begin{cases} \varphi_1(p, k, z), & p > 0, \\ \varphi_2(p, k, z), & p < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Можно показать, что  $\varphi_2(-p, k, z) = -\varphi_1(p, k, z)$  при  $p > 0$ . Действительно, функция  $D_{-\lambda-1}(\mp iz\sqrt{2k/p})$  является четным продолжением  $D_{\lambda}(\mp z\sqrt{2k/p})$  с полюсы  $p > 0$  на полюсы  $p < 0$  [10]. Полагая  $p = |q|$ , имеем  $-\lambda - 1 = (k + |q| - k|q|^2)/(2|q| - 1) = (k - |q| - k|q|^2)/(2|q|)$  при  $p < 0$  и  $\lambda = (k - |q| - k|q|^2)/(2|q|)$  при  $p > 0$ . Поэтому  $D_{-\lambda-1}(\mp iz\sqrt{2k/p}) = D_{\lambda}(\mp z\sqrt{2k/p})$ . Функция  $\varphi_2(p, k, z)$  является нечетным продолжением функции  $\varphi_1(p, k, z)$  с положительной части оси  $p$  на отрицательную. Покажем, что функция  $\varphi(p, k, z)$ , определяемая выражением (2.3), является аналитической (за исключением полюсов) в окрестности точки  $p = 0$ . Для этого исследуем поведение функции  $\varphi_1(p, k, z)$  при  $p \rightarrow +0$ . Далее используем асимптотическое представление Вентцеля — Крамера — Бриллюэна функции параболического цилиндра  $D_{\lambda}(\sqrt{2}\tau)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Введем обозначение  $A(\tau) = \tau^2 - (2\lambda + 1)$ , тогда асимптотика Вентцеля — Крамера — Бриллюэна решения уравнения (2.2) при больших значениях  $\lambda$  и  $\tau > \sqrt{2\lambda + 1}$  принимает вид [11, 12]

$$D_{\lambda}(\sqrt{2}\tau) \approx \frac{e^{-\sqrt{A(\tau)}}}{(A(\tau))^{1/4}B(\lambda)}, \quad (2.4)$$

где  $B(\lambda)$  определяется из условия  $D_{\lambda}(\sqrt{2}\tau) \approx 2^{\lambda/2}\tau^{\lambda}e^{-\tau^2/2}$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Тогда  $B(\lambda) = 2^{(\lambda+1)/2}e^{(2\lambda+1)/2}$ . Продолжая аналитически выражение (2.4) в область осцилляций  $|\tau| < \sqrt{2\lambda + 1}$  и используя асимптотическое представление гамма-функции при  $\lambda \rightarrow +\infty$ :  $\Gamma(\lambda) = \lambda^{\lambda}e^{-\lambda}\sqrt{2\pi/\lambda}$  [12], получаем

$$D_{\lambda}(\sqrt{2}\tau) \approx \frac{\sqrt{2\Gamma(\lambda+1)}}{(\pi(2\lambda+1)-\tau^2)^{1/4}} \cos\left(\frac{1}{2}\left(\tau\sqrt{2\lambda+1-\tau^2} + (2\lambda+1)\arcsin\left(\frac{\tau}{\sqrt{2\lambda+1}}\right)\right) - \frac{\pi\lambda}{2}\right).$$

Используя формулу дополнения для гамма-функции  $\Gamma(-\lambda) = -\pi/\Gamma(\lambda+1)\sin(\pi\lambda)$  [11], при малых значениях  $p$  находим

$$\varphi_1(p, k, z) \approx \frac{i \cos(k(z + \pi/4)/p) \cos(k(z_0 - \pi/4)/p)}{k \sin(\pi k/(2p))\sqrt{1-z^2}}.$$

Полученное выражение доказывает аналитичность функции  $\varphi(p, k, z)$  по переменной  $p$ , при этом точка  $p = 0$  является неизолированной особой точкой — предельной точкой полюсов.

**3. Асимптотики решений.** Перейдем к интегрированию по переменной  $\mu$  в (1.4). Рассмотрим поведение функции  $\varphi(p, k, z)$  при больших  $\mu$ , при этом  $\lambda \approx -kp/2$ . При больших отрицательных значениях  $\lambda$  асимптотика функции параболического цилиндра имеет вид  $D_\lambda(\tau) \approx 2^{-1/2} \exp(0,5\lambda \ln(-\lambda) - 0,5\lambda - \tau\sqrt{-\lambda})$  [10]. Используя эту асимптотику, при больших значениях  $\mu$  функцию  $\varphi(p, k, z)$  можно представить в виде  $\varphi(p, k, z) \approx -i \exp(-k|z - z_0|)/(2pk)$ . Следовательно, интеграл (1.4) сходится по  $\mu$  при любом фиксированном значении  $\nu$ . Далее необходимо определить полюсы функции  $\varphi(p, k, z)$ , которые являются нулями вронскиана (полюсами гамма-функции) и находятся из условия

$$\frac{k - p - kp^2}{2p} = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) имеет два решения:  $p_{n\pm}(k) = (-2n - 1 \pm \sqrt{(2n + 1)^2 + 4k^2})/(2k)$ . Полюсы по переменной  $\mu$  находим из уравнения

$$|\mu M - \omega| = p_n(k) \quad (3.2)$$

( $p_n(k) \equiv p_{n+}(k)$ ), которое при  $p_{n-}(k)$  не имеет действительных корней. В общем случае уравнение (3.2) имеет четыре действительных корня  $\mu_{nj}(\nu)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . При  $M > 1$ ,  $\omega < 1$  и любом значении  $\nu$  уравнение (3.2) имеет две серии действительных корней. Первая серия корней  $\mu_{n1}(\nu)$  для функции  $\varphi_1(p, k, z)$  является решением уравнения  $\mu_{n1}(\nu)M - \omega = p_n(\sqrt{\mu_{n1}^2(\nu) + \nu^2})$  и удовлетворяет условию  $(1 + \omega)/M > \mu_{01}(\nu) > \mu_{11}(\nu) > \mu_{21}(\nu) > \dots > \omega/M$ . Вторая серия корней  $\mu_{n2}(\nu)$  для функции  $\varphi_2(p, k, z)$  является решением уравнения  $\omega - \mu_{n2}(\nu)M = p_n(\sqrt{\mu_{n2}^2(\nu) + \nu^2})$  и удовлетворяет условию  $(\omega - 1)/M < \mu_{02}(\nu) < \mu_{12}(\nu) < \mu_{22}(\nu) < \dots < \omega/M$ . На рис. 1, 2 приведены полученные в расчетах дисперсионные кривые  $p_n(k)$ ,  $\mu_{n1}(\nu)$ ,  $\mu_{n2}(\nu)$  для первых трех мод при  $M = 1,6$ ,  $\omega = 0,7$ .

С использованием метода возмущений можно показать, что все полюсы смещаются в нижнюю полуплоскость комплексной переменной  $\mu$ . Замыкая контур интегрирования при  $x < 0$ , получаем, что волновое поле слабоэкспоненциально: действительные полюсы

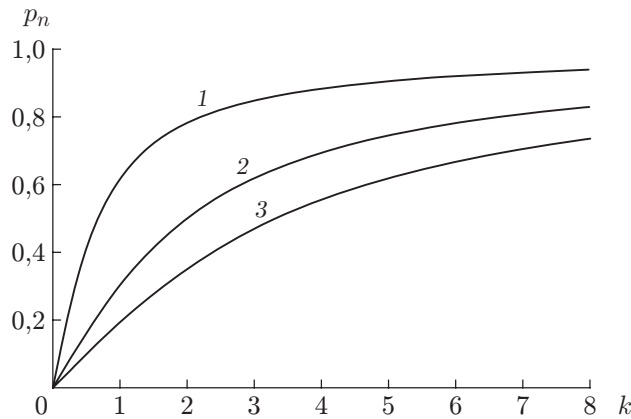


Рис. 1. Дисперсионные кривые  $p_n(k)$  ( $n = 0, 1, 2$ ):  
1 — нулевая мода, 2 — первая мода, 3 — вторая мода

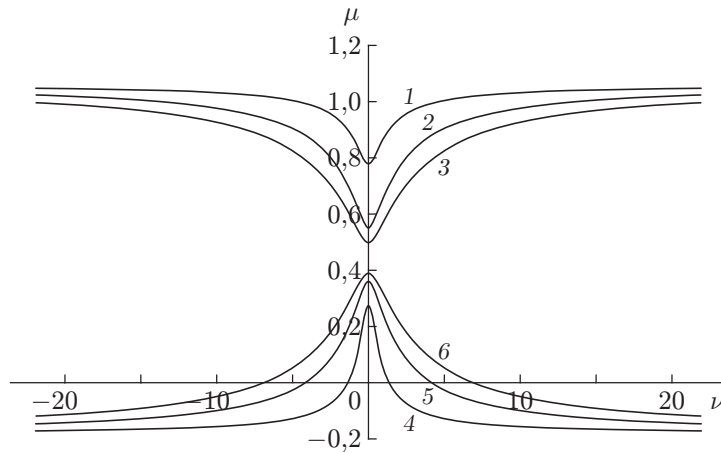


Рис. 2. Дисперсионные кривые для первых трех мод:

1–3 —  $\mu_{n1}$  (1 —  $\mu_{01}$ , 2 —  $\mu_{11}$ , 3 —  $\mu_{21}$ ), 4–6 —  $\mu_{n2}$  (4 —  $\mu_{02}$ , 5 —  $\mu_{12}$ , 6 —  $\mu_{22}$ )

отсутствуют. Имеем

$$\eta(x, y, z) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{jn+} T_{jn-}}{2\sqrt{\pi} n! \Lambda(\mu_{nj}(\nu)) \sqrt{k R_{nj}}} e^{-i(\mu_{nj}(\nu)x + \nu y)} d\nu, \quad (3.3)$$

$$T_{jn\pm} = D_n \left( \pm z_{\pm} \sqrt{\frac{2k}{R_{nj}}} \right), \quad R_{n1} = \mu_{n1}(\nu)M - \omega, \quad R_{n2} = \omega - \mu_{n2}(\nu)M, \quad \Lambda(\mu) = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}.$$

Полное поле ВГВ состоит из суммы двух серий волновых мод. Каждая серия представлена в виде интеграла по  $\nu$ , который на больших расстояниях от источника возмущений можно оценить с помощью метода стационарной фазы. Представим выражение (3.3) в виде  $\eta(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\eta_{n1}(x, y, z) + \eta_{n2}(x, y, z))$  и рассмотрим интегралы первой серии  $\eta_{n1}(x, y, z)$  с дисперсионными кривыми  $\mu_{n1}(\nu)$ . Обозначим через  $A_{n1}(\nu, z)$  амплитуду соответствующих подынтегральных выражений в (3.3). Тогда в приближении стационарной фазы получаем

$$\eta_{n1}(x, y, z) = B_{n+} + B_{n-},$$

$$B_{n\pm} = \frac{A_{n1}(\nu_{\pm}, z)}{\sqrt{2\pi x b_n(\nu_{\pm})}} e^{-i(\mu_{n1}(\nu_{\pm})x - \nu_{\pm}y \pm \pi/4)}, \quad b_n(\nu) = \frac{\partial^2 \mu_{n1}(\nu)}{\partial \nu^2},$$

где  $\nu_{\pm}$  — корни уравнения  $\partial \mu_{n1}(\nu) / \partial \nu = y/x$ . Полученное выражение справедливо в области волнового клина, полуугол раствора  $\theta$  которого определяется из соотношения  $\theta = \arctg(\mu_{n1}(\nu_n^*))$  ( $\nu_n^*$  — корень уравнения  $\partial^2 \mu_{n1}(\nu) / \partial \nu^2 = 0$ ). Аналогичные оценки можно получить для интегралов  $\eta_{n2}$ , при этом фазовая картина усложняется, так как дисперсионные кривые  $\mu_{n2}(\nu)$  пересекают ось  $\mu = 0$ . Асимптотика, описывающая поля ВГВ вдали от источника возмущений и применимая как вблизи волнового клина, так и вдали от него (равномерная асимптотика), выражается через функцию Эйри и ее производную [5, 7]. На рис. 3, 4 представлены результаты расчетов при  $z_0 = 0,6$  для первых трех мод  $\eta_{n2}(x, y, z)$ . Основной вклад в полное поле ВГВ вносит первая мода, что характерно для условий реального океана [2, 4, 6].

На рис. 4 представлены первая мода  $\eta_{02}$  и сумма мод.

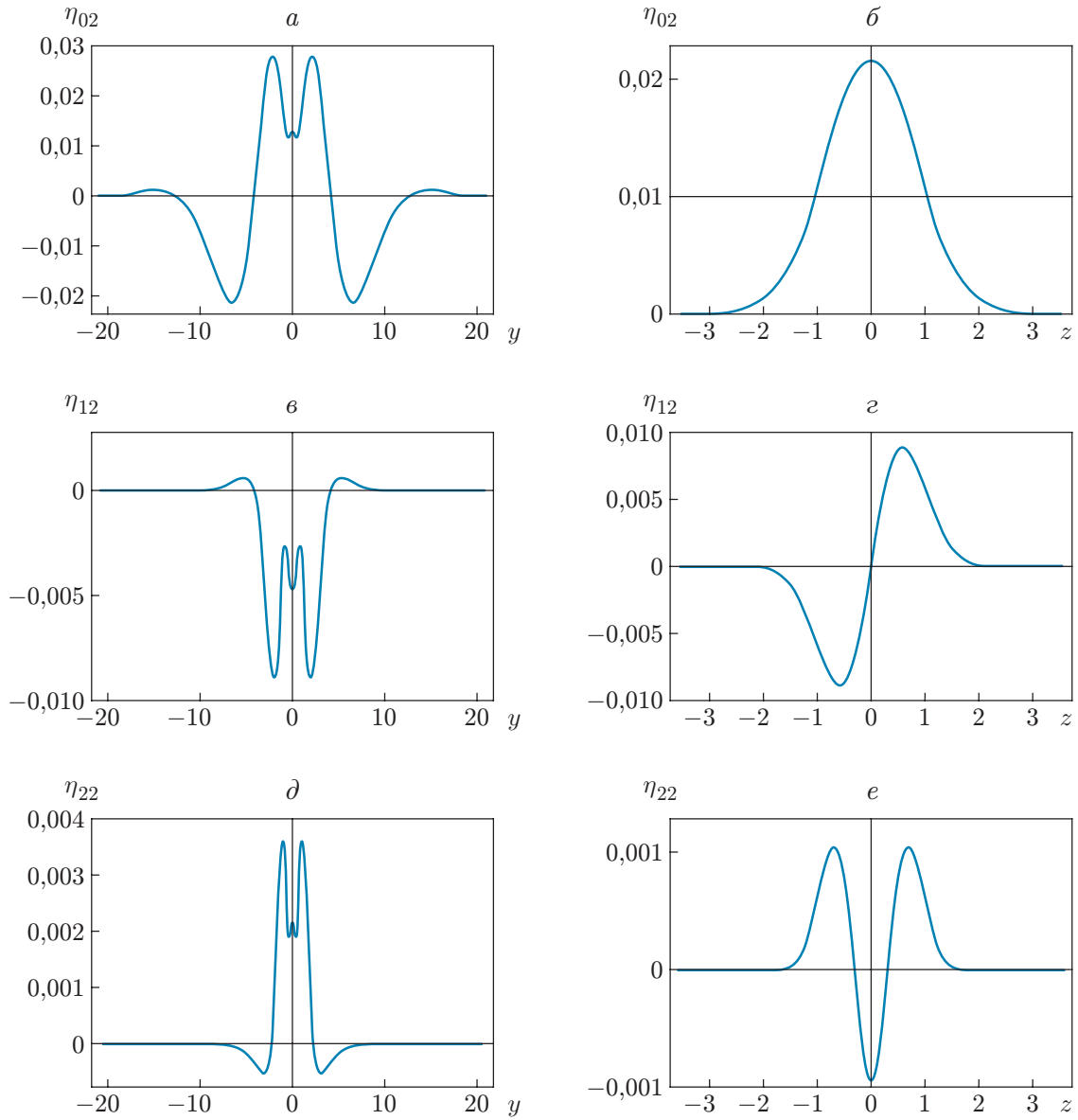


Рис. 3. Первые три моды  $\eta_{n2}$  при  $x = 20, z = -0,2$  (а, в, д) и  $x = 20, y = 3$  (б, г, е):  
 а, б —  $n = 0$ , в, г —  $n = 1$ , д, е —  $n = 2$

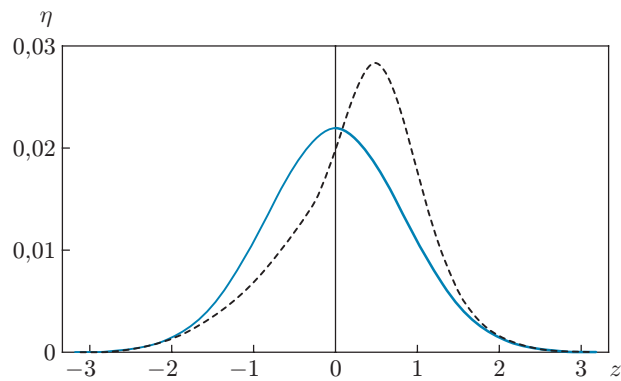


Рис. 4. Первая мода  $\eta_{02}$  (сплошная линия) и сумма мод  $\eta_{02} + \eta_{12} + \eta_{22}$  (штриховая линия) при  $x = 20, y = 3$

Таким образом, полученные для модельного квадратичного распределения частоты плавучести аналитические решения основной краевой задачи о внутренних волнах, выражающиеся через функции параболического цилиндра, позволяют построить асимптотики амплитудно-фазовых характеристик дальних полей, генерируемых внутренними гравитационными волнами в стратифицированной среде с непостоянной частотой Брента — Вайсяля.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Эккарт К.** Гидродинамика океана и атмосферы. М.; Ижевск: Регуляр. и хаотич. динамика, 2004.
2. **Pedlosky J.** Waves in the ocean and atmosphere: Introduction to wave dynamics. Berlin: Springer, 2010.
3. **Sutherland B. R.** Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
4. **Massel S. R.** Internal gravity waves in the shallow seas. Berlin: Springer, 2015.
5. **Булатов В. В.** Волны в стратифицированных средах / В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров. М.: Наука, 2015.
6. **Vlasenko V.** Baroclinic tides / V. Vlasenko, N. Stashchuk, K. Hutter. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2005.
7. **Булатов В. В., Владимиров Ю. В.** Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые движущимся с докритической скоростью осциллирующим источником возмущений // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 6. С. 50–57.
8. **Булатов В. В., Владимиров Ю. В.** Внутренние гравитационные волны при критических режимах генерации и в окрестности траекторий движения источников возмущения // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 70–79.
9. **Morozov E. G.** Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018.
10. **Бейтмен Г.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1974.
11. **Никифоров А. Ф.** Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров, В. В. Уваров. М.: Интеллект, 2008.
12. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

*Поступила в редакцию 12/III 2018 г.,  
после доработки — 19/VII 2018 г.  
Принята к публикации 3/IX 2018 г.*